$$a_n = \frac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + a_0 c_1^n .$$

$$\therefore a_1 = \frac{1-3}{1-3} + 2\times 3 = 7,\ a_2 = \frac{1-3^2}{1-3} + 2\times 3^2 = 22,$$

$$a_3 = \frac{1-3^3}{1-3} + 2\times 3^3 = 67,\ a_4 = \frac{1-3^4}{1-3} + 2\times 3^4 = 202,$$

$$a_5 = \frac{1-3^5}{1-3} + 2\times 3^5 = 607,\ a_6 = \frac{1-3^6}{1-3} + 2\times 3^6 = 1822.$$

ب-

$$a_{15} = \frac{1-3^{15}}{1-3} + 2\times 3^{15} = 35872267.$$

ت- من المعادلة (5- 3a) نجد أن:

$$n = \frac{\ln[\frac{c_0 + a_n(c_1-1)}{c_0 + a_0(c_1-1)}]}{\ln(c_1)} = \frac{\ln[\frac{1+(3-1)147622}{1+2(3-1)}]}{\ln(3)} = \frac{\ln(59049)}{\ln(3)} = 10.$$

أي إن الحد العاشر تكون قيمته 147622.

5-8 دراسة حالات في النمذجة الحتمية للتغيير

Case Studies of Deterministic Modeling of Change:

يتناول هذا المبحث عدد التطبيقات للنمذجة الحتمية للتغيير، وسوف توضح هذه التطبيقات بشيئ من التفصيل من جانبيها النظري والعملي.

5-8-1 قانون نيوتن للتَبريد

Newton's Law of Cooling:

من تطبيقات نمذجة التغيير، نمذجة التغيير في درجة حرارة شيئ يوضع في بيئة ذات حرارة ثابتة، مثل وضع جسم دافئ داخل مجمدة، أو إدخال قطعة من الآيس كريم الباردة إلى داخل غرفة. فلو كان T_0 يرمز إلى درجة الحرارة الابتدائية للجسم، و C يرمز إلى درجة الحرارة الثابتة في البيئة المحيطة بالشيء، و T_n يرمز إلى درجة حرارة الشيء بعد n من الوحدات الزمنية، فإن مقدار التغيير في درجة حرارة الشيء في الوحدة الزمنية الواحدة يحسب بالمعادلة الفرقية الآتية:

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k(T_n - C);\ n \in N, \qquad (4\text{-}5)$$

إذ إن k هو مقدار ثابت يعتمد على طبيعة الشيئ. وتُعرف المعادلة الفرقية الأخيرة بقانون نيوتن للتبريد. بعبارة أخرى فإن قانون نيوتن للتبريد ينص على أن **الفرق في درجة الحرارة** ΔT_n

بين الجسم الساخن والبيئة المحيطة يتناقص بنسبة تتناسب مع الفرق بين درجتي الحرارة، انظر أيضا الفصل الثاني عشر.

فلو أُدخل كوب شاي درجة حرارته 62 درجة مئوية إلى داخل غرفة درجة حرارتها 22 درجة مئوية، وبعد دقيقة واحدة أصبحت درجة حرارته 60 درجة مئوية، فمن الأسئلة المعروضة ما يأتي:

س1: كم ستكون حرارة الشاي بعد 5 دقائق؟

س2: بعد كم دقيقة سوف تتساوى تقريبا درجة حرارة الشاي مع درجة حرارة الغرفة؟

قبيل الإجابة على هذين السؤالين، نفرض أن T_0 يرمز إلى درجة الحرارة الابتدائية للشاي، و C يرمز إلى درجة حرارة الغرفة، و T_n يرمز إلى درجة حرارة الشاي بعد n من الدقائق. ونلاحظ بأن معطيات هذه المسألة هي: $T_0 = 62$ و $T_1 = 60$ و C=22. وبتطبيق هذه المعطيات على المعادلة (5-4)، نجد أن:

$$\Delta T_0 = T_1 - T_0 = k(T_0 - C)$$
$$60 - 62 = k(62 - 22)$$
$$\therefore k = \frac{-2}{40} = -0.05.$$

فيكون النموذج الرياضي المعبّر عن التغيير في درجة حرارة الشاي بعد n من الدقائق هو:

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = -0.05(T_n - 22);\ n \in N$$

أي إن:

$$T_{n+1} = 1.1 + 0.95T_n;\ n \in N$$
$$T_0 = 62. \qquad (5\text{ -}5)$$

ومن النموذج الأخير يمكننا الإجابة عن **س1**، وذلك بإيجاد T_1 ثم T_2 ثم T_3 ثم T_4 ومن ثم T_5 التي تمثل درجة حرارة الشاي بعد 5 دقائق. وهذه النتائج مبينة في الجدول الآتي:

n	0	1	2	3	4	5
T_n	62.0	60.0	58.1	56.3	54.6	53.0

للإجابة على **س2**، فيفضل أن نتحرى الحرارة التي سوف تؤول إليها درجة حرارة الشاي بعد مدة طويلة، ولتكن بعد ساعتين (أي 120 دقيقة). والبرنامج الآتي، واسمه NewtonCooling، وهو مرفق في القرص المدمج، يؤدي الغرض المطلوب.

بمقارنة النموذج الرياضي (5-5) مع المعادلة الفرقية (5-1)، نجد أن: $c_0 = 1.1$ و $c_1 = 0.95$. فيكون حل النموذج (5-5)، بالمقارنة بالحل العام (5-2)، هو:

$$T_n = \frac{1.1(1 - 0.95^n)}{1 - 0.95} + 62(0.95^n) = 22 - 40(0.95)^n.$$

ولما كانت الغاية $\lim_{n\to\infty} 0.95^n = 0$، لذا نجد أن $\lim_{n\to\infty} T_n = 22$. أي إنه إذا بقي الشاي لمدة طويلة في الغرفة فإن درجة حرارته سوف تؤول في النهاية إلى درجة حرارة الغرفة.

5-8-2 شهادات التوفير Saving Certificates:

شهادة توفير قيمتها الابتدائية C دينار تتقاضى فائدة شهرية مقدارها α %.

أ- اكتب النموذج الحركي لقيمة هذه الشهادة.

ب- جد الحل للنموذج الحركي.

ت- جد مقدار الربح الشهري من هذه الشهادة.

ث- جد عدد الأشهر اللازمة لكي تتضاعف فيها قيمة شهادة التوفير k من المرات.

ج- افرض أن القيمة الابتدائية لشهادة التوفير هي C=20000 دينار، وأن الفائدة الشهرية مقدارها 1%. جد قيمة هذه الشهادة خلال أشهر السنة الأولى، وكذلك مجموع الأرباح التراكمية. بعد كم سنة سوف تتضاعف قيمة هذه الشهادة؟

ح- استخدم المعطيات المعطاة في ج لرسم قيمة هذه الشهادة منذ الشهر الأول ولمدة خمس سنوات.

الحل:

نفرض أن المتغير a_n يمثل قيمة الشهادة التوفير بعد n من الأشهر.

أ- إن قيمة الشهادة في الشهر القادم تساوي قيمتها في الشهر الحالي مضافا إليها الربح الناجم عن الفائدة. أي إن:

$$a_{n+1} = a_n + \alpha a_n.$$

فيكون النموذج الحركي لقيمة الشهادة التوفير هو:

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = (1+\alpha)a_n;\ n \in N \\ &a_0 = C. \end{aligned} \qquad (6\text{-}5)$$

ب- بمقارنة النموذج السابق مع المعادلة الفرقية (5-1)، نجد أن: $c_0 = 0$ و $c_1 = 1+\alpha$. ومن الحل (5-2) نستنتج أن حل النموذج الحركي لقيمة الشهادة التوفير هو:

$$a_n = C(1+\alpha)^n;\ n \in N.$$

وكما هو واضح فإن قيمة شهادة التوفير a_n تزداد بازدياد قيمة n (عدد الأشهر) لان $(1+\alpha)^n$ هي دالة تزايدية في n لكون $(1+\alpha) > 1$.

ت- إن الربح Profit الناجم عن الفائدة في الشهر القادم هو:

$$p_{n+1} = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = \alpha a_n.$$

وبالاستفادة من ب، نجد أن:

$$p_{n+1} = C\alpha(1+\alpha)^n;\ n \in N. \qquad (7\text{-}5)$$

وتجدر الإشارة إلى انه إذا أريد استخدام العلاقة الأخيرة عند قيم كبيرة من n، فيفضل استخدام الدقة المضاعفة بالحاسوب لتجنب أخطاء التدوير.

ث- المطلوب إيجاد قيمة k التي تحقق العلاقة الآتية:

$$a_n = ka_0 = kC.$$

وبالتعويض من العلاقة الأخيرة، نجد أن:

$$C(1+\alpha)^n = kC$$

$$\therefore k = (1+\alpha)^n.$$

ولإيجاد عدد الشهور اللازمة لكي تتضاعف فيها قيمة شهادة التوفير k من المرات، نقوم بأخذ ln طرفي المعادلة الأخيرة، وبعد التبسيط نجد أن:

$$n = \frac{\ln(k)}{\ln(1+\alpha)}. \qquad (8\text{-}5)$$

وبطبيعة الحال فإن قيمة n الناتجة تُقرّب إلى عدد صحيح.

ج- لدَينا الآن المعطيات الآتية: C=20000 و $\alpha = 0.01$. فمن ب نجد أن قيمة هذه الشهادة في الشهر n هي:

$$a_n = C(1+\alpha)^n = 20000(1.01)^n; \quad n \in N.$$

والجدول الآتي يبين قيمة الشهادة a_n والربح الشهري p_n لأشهر السنة الأولى من الإيداع.

الجدول(5-1): قيمة شهادة التوفير والربح الشهري منها، وكذلك الربح الشهري خلال أشهر لسنة الأولى من الإيداع.

الشهر n	قيمة الشهادة a_n (دينار)	الربح الشهري p_n (دينار)
0	20000	0
1	20200	200
2	20402	202
3	20606	204
4	20812	206
5	21020.2	208
6	21230.4	210
7	21442.7	213
8	21657.1	214
9	21873.7	217
10	22092.4	218
11	22313.4	221
12	22536.5	224

أي إن قيمة شهادة التوفير بعد 12 شهرا سوف تصبح 22536.5 ديناراً، ويكون مجمل الأرباح خلال السنة الأولى: $a_{12} - C = 22536.5 - 20000 = 2536.5$ دينار.

لحساب عدد السنين اللازمة لكي تتضاعف قيمة هذه الشهادة، أي إيجاد قيمة n التي عندها k=2:

$$n = \frac{\ln(k)}{\ln(1+\alpha)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1+0.01)} = 69.6607 \cong 70.$$

أي بعد 70 شهرا (أي خمس سنوات و 10 أشهر) سوف تصبح قيمة هذه الشهادة الضعف، أي 40000 دينار.

5-8-3 رَهْن بيت Mortgaging a Home:

اشتُري بيت بمبلغ C دينار، ودُفع مبلغ أولي مقداره A دينار من قيمة البيت، وقُسّطت المبلغ المتبقي بأقساط شهرية مقدارها M دينار، وبفائدة شهرية مقدارها α %.

أ- اكتب النموذج الحركي المعبّر عن المبلغ الشهري المطلوب لهذا البيت.

ب- جد الحل للنموذج الحركي.

ت- جد عدد الأشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت.

ث- جد مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد.

ج- افرض أن ثمن البيت هو C=150 مليون دينار، ودُفع مبلغ A=50 مليون دينار من قيمة البيت، وقُسّط المبلغ المتبقي على أقساط شهرية مقدارها M=5 مليون دينار، وبفائدة شهرية مقدارها $\alpha = 0.02$. اكتب برنامجا حاسوبيا يقوم بحساب المبالغ المتبقية في ذمة المشتري في نهاية كل شهر، وجد عدد الأشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت. ما هو مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد؟

الحل:

أ- نفرض أن المتغير b_n يمثل الدَين المطلوب من المشتري بعد n من الأشهر من شراء البيت. وكما هو واضح من معلومات هذه المسألة فإن النموذج الرياضي على النحو الآتي:

الدَين المطلوب في الشهر n+1 = **الدَين المطلوب في الشهر** n + **فائدة الشهر** n - **قسط الشهر** n.

ولو فرضنا أن D=C-A يمثل المبلغ المتبقي في ذمة المشتري عند الشراء، فيكون النموذج الرياضي على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + \alpha b_n - M = (1+\alpha)b_n - M;\ n = 0,1,2,... \\ b_0 &= D. \end{aligned} \qquad (9\text{-}5)$$

يلاحظ في هذا النموذج أن الفرق: