المرحلة الخامسة

المصادقة على النموذج

يلاحظ أن النموذج كفء عند استخدامه للتنبؤ على المدى القريب، أما على المدى البعيد فهو ضعيف ويعطي قيماً اكبر بكثير من القيم الحقيقية؛ لذا فهناك خلل في هذا النموذج إذا أُريد استخدامه للتنبؤ بعدد السكان على المدى البعيد. لذا لا نوصي باستخدام هذا النموذج إذا أُريد استخدامه للتنبؤ بعيد المدى، لهذا نعود إلى المرحلة الأولى (مرحلة الفرضيات) لمحاولة تطور فرضية النموذج من أجل تحسين تنبؤه.

المرحلة الأولى

الفرضيات: إن الفرضية التي افترضها توماس مالثوس لم تراعِ محدودية حجم المجتمع، لذا كان نموذجه يتضمن نموا سكانيّا غير مقيّد. لقد شخّص العالم فرانسوا فيرهولست هذا الخلل في نموذج توماس مالثوس وذلك في العام 1837، فأضاف عامل محدودية حجم المجتمع إلى فرضيات النموذج.

إن أي مجتمع، مهما كان حجمه، فان موارده تكون محدودة. فلو عددنا الكمية الثابتة $N(\infty)$ لكي تكون السعة القصوى للمجتمع، فان $N(t)/N(\infty)$ تمثل النسبة المُستغلة من حجم المجتمع في الزمن t، وبذلك تكون $1-N(t)/N(\infty)$ تمثل النسبة غير المستغلة من حجم المجتمع في الزمن t.

وبناءا على ما تقدّم، تكون الفرضيات على النحو الآتي: إن التغيّر في حجم المجتمع يتناسب مع كل مما يأتي:

1- حجم المجتمع الحالي $N(t)$.

2- النسبة غير المستغلة من حجم المجتمع $1-N(t)/N(\infty)$.

المرحلة الثانية

الصياغة الرياضية: وعلى نحو مماثل لما سبق نجد أن النموذج المقترح وفق الفرضيتين السابقتين سيكون على النحو الآتي:

$$\frac{dN(t)}{dt} = cN(t)[1-\frac{N(t)}{N(\infty)}], \qquad (3)$$

إذ إن c كمية ثابتة.

المرحلة الثالثة

الحل الرياضي: إن النموذج الذي تم الحصول عليه هو معادلة تفاضلية من المَرتبة الأولى، ولحلها نلاحظ أولا أن:

$$\because \frac{1}{N(t)} + \frac{1/N(\infty)}{\{1-N(t)/N(\infty)\}} = \frac{1}{N(t)[1-N(t)/N(\infty)]}$$

$$\therefore \int \frac{dN(t)}{N(t)[1-N(t)/N(\infty)]} = \int \frac{dN(t)}{N(t)} + \int \frac{dN(t)/N(\infty)}{[1-N(t)/N(\infty)]}$$
$$= \ln[N(t)] - \ln[1-N(t)/N(\infty)]$$
$$= \ln[\frac{N(t)}{\{1-N(t)/N(\infty)\}}].$$

وبالعودة إلى المعادلة التفاضلية (3)، نجد أن:

$$\frac{dN(t)}{N(t)[1-\frac{N(t)}{N(\infty)}]} = cdt.$$

وبأخذ تكامل الطرفين، نجد أن:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)[1-\frac{N(t)}{N(\infty)}]} = c\int dt = ct + k,$$

إذ إن k ثابت التكامل. وبالاستفادة من النتيجة السابقة نحصل على الآتي:

$$\ln[\frac{N(t)}{\{1-N(t)/N(\infty)\}}] = ct + k.$$

ولإيجاد قيمة ثابت التكامل نلاحظ انه عند الزمن t=0 فان عدد السكان هو N(0)، فيكون ثابت التكامل هو:

$$k = \ln[\frac{N(0)}{\{1-N(0)/N(\infty)\}}].$$

وبعد التعويض عن ثابت التكامل، ثم التبسيط نحصل على الحل الآتي للمعادلة التفاضلية السابقة:

$$N(t) = \frac{N(\infty)}{[1+\{N(\infty)/N(0)-1\}e^{-ct}]}. \qquad (4)$$

ويُعرف هذا النموذج بنموذج بيير فيرهولست للسكان. فبعد تحديد السعة القصوى للمجتمع $N(\infty)$، يمكن إيجاد قيمة الثابت c من العلاقة الآتية:

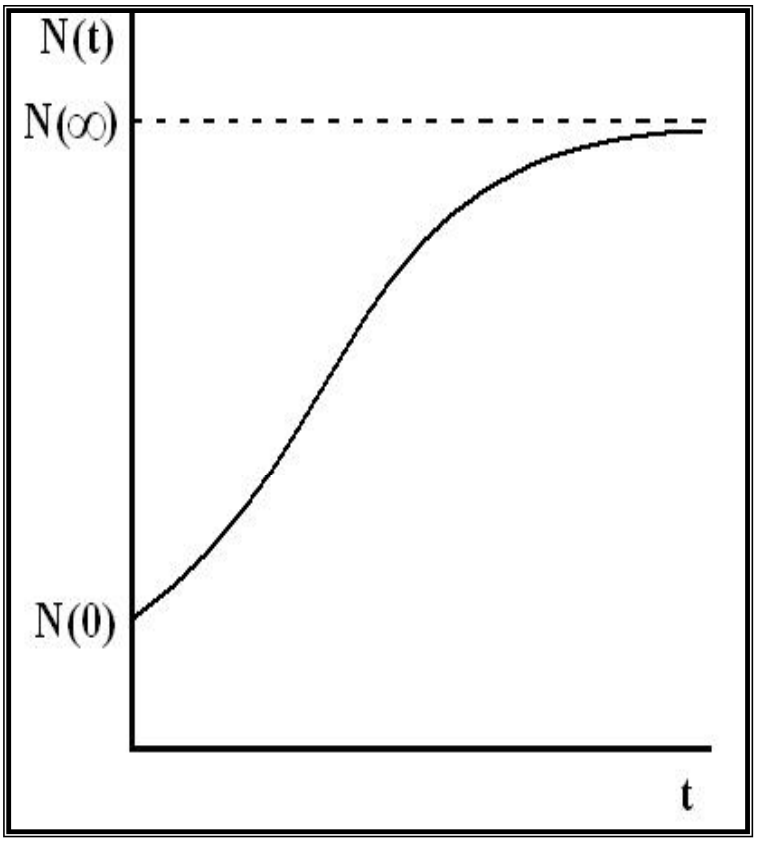
$$c = -\ln[\frac{N(\infty)-N(1)}{N(1)\{N(\infty)/N(0)-1\}}]. \qquad (5)$$

المرحلة الرابعة

تفسير الحل:

أ- **رسم الحل:** الشكل الآتي يوضح نموذج بيير فيرهولست للسكان، c>0.

وكما هو واضح من الشكل السابق فان نموذج بيير فيرهولست يعطي وصفا دقيقا للنمو في حجم السكان وفق تقيده بالحد الأقصى من سعة المجتمع (∞)N.



الشكل (6) نموذج بيير فيرهولست للسكان، 0<c.

ب- **اختبار كفاءة النموذج في التنبؤ:** البرنامج الآتي- واسمه **VerhPred-** يقوم بالتنبؤ بأعداد السكان في الولايات المتحدة الأميركية للسنوات اللاحقة، بعد تحديد السعة القصوى للمجتمع $N(\infty) = 350$ مليون نسمة. كذلك يقوم البرنامج بحساب مقدار الخطأ المئوي في التنبؤ

```
% Verhulst Population Model
clear
clc
N=[3.929 5.308 7.24 9.638 12.866 17.069 23.192 31.443 38.558 50.156 62.948 75.995 91.972 105.711
122.755 131.669 150.697 179.323 203.212 226.505 248.710  281.416 308.746];
Ninf=350
c=-log((Ninf-N(2))/(N(2)*(Ninf/N(1)-1)))
m=length(N);
year(1:2)=[1790 1800];
Npred(1:2)=N(1:2);
NINF(1:m)=Ninf;
for t=3:m
   year(t)=year(1)+10*(t-1);
    Npred(t)=Ninf/(1+((Ninf/N(1))-1)*exp(-c*(t+1)));
end
AE=abs(N-Npred);
RE=AE./N;
```

```
PE=RE*100;
disp('    Year        t        N(t)    Npredicted(t)    AE        RE        PE')
format bank
disp([  year' [0:m-1]' N'  Npred'   AE'    RE'    PE'])
MSE=sum(AE.^2)/(m-2)
plot(year,N,'O',year,N,year,Npred,'s',year,Npred,year,NINF)
title('Verhulst Population Model')
xlabel('Year t')
ylabel('Population  N(t)')
Grid
```

ونتائج البرنامج هي:

Ninf =

350.00

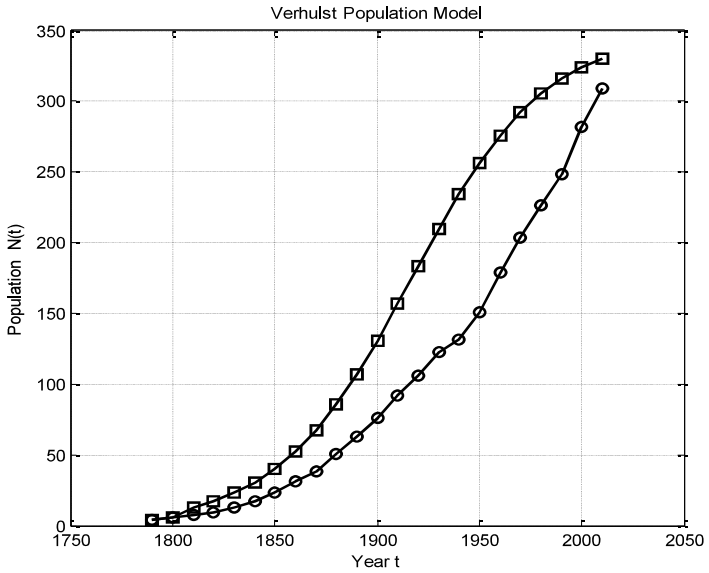
c =

0.30

MSE =

3706

Year	t	N(t)	Npredicted(t)	PE
1790.00	0	3.93	3.93	0
1800.00	1.00	5.31	5.31	0
1810.00	2.00	7.24	12.95	78.90
1820.00	3.00	9.64	17.34	79.91
1830.00	4.00	12.87	23.11	79.63
1840.00	5.00	17.07	30.63	79.43
1850.00	6.00	23.19	40.28	73.70
1860.00	7.00	31.44	52.49	66.93
1870.00	8.00	38.56	67.58	75.28
1880.00	9.00	50.16	85.77	71.00
1890.00	10.00	62.95	106.99	69.96
1900.00	11.00	76.00	130.86	72.20
1910.00	12.00	91.97	156.63	70.30
1920.00	13.00	105.71	183.23	73.33
1930.00	14.00	122.76	209.45	70.62
1940.00	15.00	131.67	234.15	77.84
1950.00	16.00	150.70	256.46	70.18
1960.00	17.00	179.32	275.83	53.82
1970.00	18.00	203.21	292.09	43.74
1980.00	19.00	226.51	305.37	34.82
1990.00	20.00	248.71	315.95	27.04
2000.00	21.00	281.42	324.24	15.22
2010.00	22.00	308.75	330.63	7.09



المرحلة الخامسة

المصادقة على النموذج: يلاحظ أن النموذج قد تحسّن أداؤه عند استخدامه للتنبؤ على المدى القريب والبعيد، إذ استطاع إعطاء تنبؤات دقيقة وقريبة من الواقع وعلى مدى 200 سنة، لذا نوصي باستخدام هذا النموذج لاستخدامه للتنبؤ، لاسيما إن كان على المدى البعيد.

المرحلة السادسة

استعمال النموذج: بعد نجاح النموذج في جميع المراحل السابقة، تكون قد اكتملت مراحل بناء نموذج رياضي مناسب السكان.

ملاحظة

1- يلاحظ أن نموذج توماس مالثوس أسهل في البناء الرياضي من نموذج بيير فيرهولست، كما أنه لا يحتاج إلى معلومات عن السعة القصوى لحجم المجتمع. لذا يمكن استخدام نموذج توماس مالثوس مع التنبؤات القريبة المدى، أما نموذج بيير فيرهولست فيفضل استخدامه مع التنبؤات البعيدة المدى.

2- كما اشرنا سابقا فان تعدادات السكان تكون غالبا كل 10 سنوات، فإذا أريد تقدير عدد السكان في أية سنة، فيمكن إيجاد قيمة الدليل t المقابلة، وكما سوف نوضح ذلك في المبحث القادم.

نمذجة عدد سكان العراق

يُختتم هذا الفصل بنمذجة عدد سكان العراق من أجل تقدير عدد سكانه على المدى القريب والبعيد. وتُطرح المادة العلمية من خلال أمثلة تعتمد أساسا على البيانات الموجودة في الجدول (1-12).

المثال (12-1)

باعتبار سنة 1947 سنة الأساس، لائم نموذج توماس مالثوس لعدد سكان العراق، واختبر دقته في التنبؤ بعدد سكان العراق للسنوات 1977 و 1987 و 1997.

الحل

بعد إدخال المعلومات اللازمة إلى البرنامج MultPred، تم الحصول على النتائج الآتية:

c =

0.3287

Year	t	N(t)	Npredicted(t)	PE
1947.00	0	4.56	4.56	0
1997.00	1.00	6.34	6.34	0
1967.00	2.00	9.26	8.81	4.84
1977.00	3.00	12.17	12.23	0.53
1987.00	4.00	16.34	16.99	4.01
1997.00	5.00	22.02	23.61	7.21

MSE =

0.79

في ضوء المعلومات المستخدمة– تعدادي السكان للعامين 1947 و 1957– فإن نموذج توماس مالثوس يوضح أن نسبة النمو الأسي في عدد سكان العراق هي $0.3287\times100\% = 32.87\%$ خلال 10 سنوات، أي قرابة 3.3%في السنة. أما فيما يخص التنبؤ، فإن هذا النموذج قد نجح نجاحا باهرا إذ أعطى مُتنبئات لأعداد السكان للسنوات 1977 و 1987 و 1997 قريبة جدا من القيم الواقعية.

المثال (12-2)

بفرض أن السعة القصوى للعراق هي $N(\infty)=35$ مليون نسمة، أعد حل المثال السابق مستخدما نموذج بيير فيرهولست.

الحل

بعد إدخال المعلومات اللازمة إلى البرنامج VerhPred، تم الحصول على النتائج الآتية:

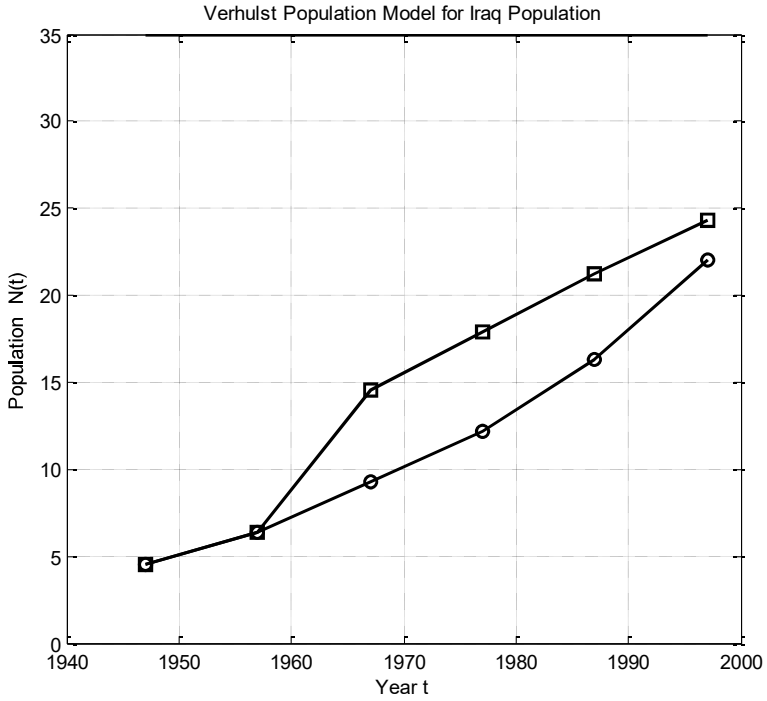
c =

0.39

Year	t	N(t)	Npredicted(t)	PE
1947.00	0	4.56	4.56	0
1957.00	1.00	6.34	6.34	0
1967.00	2.00	9.26	14.53	57.04
1977.00	3.00	12.17	17.91	47.15
1987.00	4.00	16.34	21.25	30.05
1997.00	5.00	22.02	24.33	10.49

MSE =

22.56



وكما هو واضح فإن نموذج بيير فيرهولست يعطي تنبؤاً ذا كفاءة أقل مقارنة بنموذج توماس مالثوس. وبطبيعة الحال فإن كفاءة نموذج بيير فيرهولست تتجلى في التنبؤات بعيدة المدى.

مثال :

باعتبار سنة 1987 سنة الأساس، لائم نموذج توماس مالثوس لعدد سكان العراق للسنوات العشرين التالية.

الحل

لو عددنا السنة 1987 سنة الأساس، فيكون الدليل t=0 عند هذه السنة، وعند السنة 1997 يكون t=1، وعند السنة 1998 يكون t=1.1، وعند السنة 1999 يكون t=1.2، وعند السنة 2000 يكون t=1.3. وعلى هذا النحو يمكن إيجاد قيمة الدليل t المقابل لأية سنة مطلوب تقدير عدد سكانها. والبرنامج الآتي، واسمه IraqPrMu، يقوم بإجراء اللازم.

```
% Malthusian Population Model for Iraq Population
clear
clc
N=[16.34 22.02];
c=log(N(2)/N(1))
year(1)=input('What is the starting year?');
m=input('What is the required number of years to be predicted?');
tt(1)=(year(1)-1987)/10;
Npred(1)=N(1)*exp(c*tt(1));
for t=2:m
   tt(t)=tt(1)+(t-1)/10;
```

```
   year(t)=year(1)+(t-1);
   Npred(t)=N(1)*exp(c*tt(t));
end
disp('      Year          t        Npredicted(t)')
format bank
disp([  year' tt'   Npred'  ])
plot(year,Npred,'s')
title('Malthusian Population Model for the Republic of Iraq
Population')
xlabel('Year t')
ylabel('Predicted Population  N(t)')
grid
```

ونتائج الحاسوب هي:

```
c =
    0.30

What is the starting year?1998
What is the required number of years to be predicted?20
    Year          t        Npredicted(t)
    1998.00       1.10       22.69
    1999.00       1.20       23.37
    2000.00       1.30       24.08
    2001.00       1.40       24.81
    2002.00       1.50       25.56
    2003.00       1.60       26.34
    2004.00       1.70       27.13
    2005.00       1.80       27.96
    2006.00       1.90       28.80
    2007.00       2.00       29.67
    2008.00       2.10       30.57
    2009.00       2.20       31.50
    2010.00       2.30       32.45
    2011.00       2.40       33.44
    2012.00       2.50       34.45
    2013.00       2.60       35.49
    2014.00       2.70       36.57
    2015.00       2.80       37.67
    2016.00       2.90       38.81
    2017.00       3.00       39.99
```

المثال (12-6)

بفرض أن نموذج توماس مالثوس هو النموذج المناسب لسكان العراق على المدى القريب، وان نسبة النمو السكاني c تبقى ثابتة:

أ- برهن على أن عدد السنوات τ اللازمة كي يصبح حجم السكان k أضعاف الحجم الابتدائي $N(0)$ هو:

$$\tau = \ln(k)/c.$$

ب- باعتبار سنة 1987 سنة الأساس، ففي أية سنة سوف:

1- يتضاعف عدد سكان العراق؟

2- يصبح عدد سكان العراق ثلاثة أمثال عدده في سنة الأساس؟

الحل

أ-

$$\because N(t) = N(0)e^{ct}$$

فإن τ يجب أن تحقق العلاقة الآتية:

$$kN(0) = N(0)e^{c\tau}.$$

$$\therefore \tau = \ln(k)/c.$$

ت- كما لاحظنا سابقا، فعندما تكون سنة الأساس 1987 فان معلمة النمو الأسي تكون c=0.3، كما أنه عند هذه السنة يكون الدليل t=0.

1- بالتعويض في المعادلة الأخيرة عن k=2 :

$$\tau = \ln(2)/0.3 = 2.3105.$$

ولتحويل الدليل τ إلى السنة التي تقابله:

$$\begin{aligned} Year &= 1987 + 10\tau \\ &= 1987 + 10(2.3105) \end{aligned}$$

أي إننا نتوقع في العام 2010 أن يكون عدد سكان العراق ضعف عدده في سنة الأساس 1987. أي إن العدد المتوقع لسكان العراق في العم 2010 هو 32.45 مليون نسمة.

2- بالطريقة نفسها نجد أنه عندما k=3:

$$\tau = \ln(3)/0.3 = 3.6620.$$

فتكون:

$$\begin{aligned} Year &= 1987 + 10\tau \\ &= 1987 + 10(3.6620) \\ &= 2024. \end{aligned}$$

أي إننا نتوقع في العام 2024 أن يكون عدد سكان العراق ثلاثة أضعاف عدده في سنة الأساس 1987. أي إن العدد المتوقع لسكان العراق في العام 2024 قرابة 49 مليون نسمة.

تمارين

1-12 إذا كان عدد سكان دولة الإمارات العربية المتحدة حسب تعداد العام 2005 هو 4,444,011 نسمة، وفي العام 2006 بلغ 5,631,135 نسمة، ما النسبة المئوية للنمو الأسي السنوي لسكان دولة الإمارات العربية المتحدة؟

Ans. 23.68%

2-12 إذا كان عدد سكان الاتحاد السوفيتي السابق في العام 1959 هو 209 مليون نسمة، وكان النمو الأسي في حجم السكان 1% لكل سنة.

أ- لائم نموذج توماس مالثوس لعدد سكان الاتحاد السوفيتي السابق.

ب- تنبأ بعدد سكان الاتحاد السوفيتي السابق في السنة 1970.

Ans. $N(t) = 209e^{0.01t}$, 211.3117.

3-12 إذا كان عدد سكان إحدى البلدان كما مبين في الجدول الآتي.

السنة	عدد السكان (مليون نسمة)
2000	1.8
2010	1.92

أ- لائم نموذج توماس مالثوس لعدد سكان هذا البلد.

ب- تنبأ بعدد سكان هذا البلد في السنتين 2020 و 2030.

4-12. بفرض أن نموذج توماس مالثوس هو النموذج المناسب لسكان العراق على المدى القريب، وان نسبة النمو السكاني c تبقى ثابتة. وباعتبار سنة 1987 سنة الأساس، ففي أية سنة سوف يصبح عدد سكان العراق أربع أمثال عدده في سنة الأساس؟

Ans. 2033.