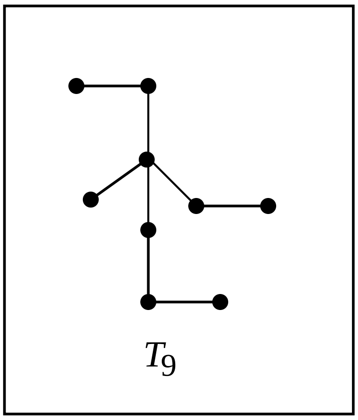
## الأشجار Trees:

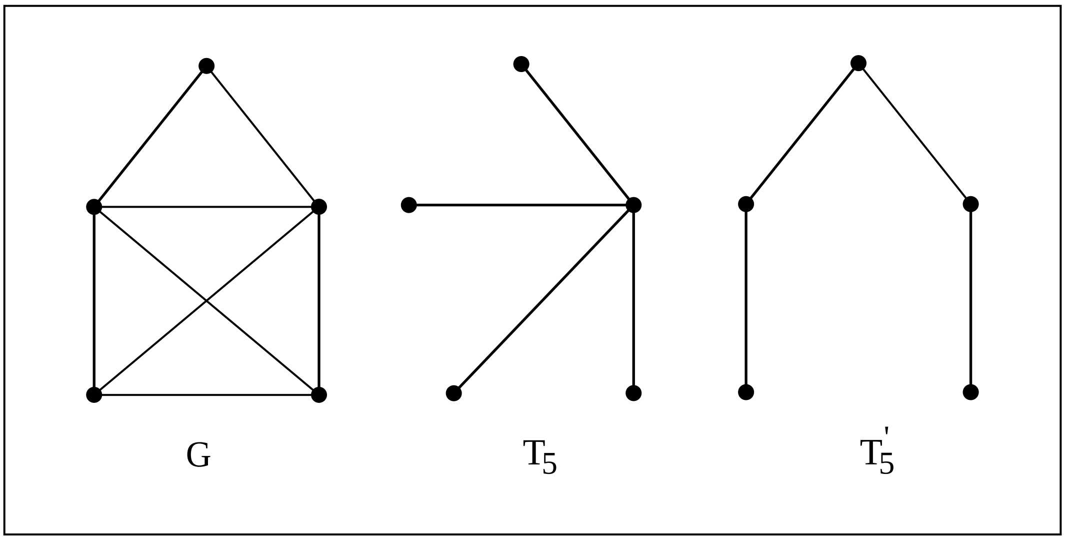
**الشجرة (tree):** هي بيان متصل لا يحتوي على أي دارة ، ويرمز للشجرة التي رتبتها p بالرمز $T_p$. لاحظ الشكل 8-1



**الشكل 8-1**

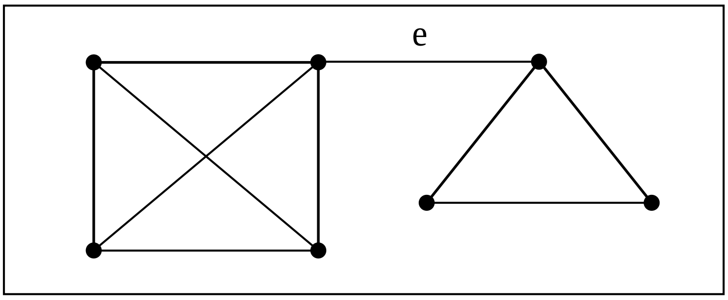
يقال بيان جزئي T من بيان G أنه **شجرة مولدة** (spanning tree) إذا كان T شجرة تحوي على كافة رؤوس G.

**مثال 1:** نلاحظ من الشكل 8-2 أن كلا من $T_5'$ و $T_5$ شجرة مولدة للبيان G.



**الشكل8-2.**

**تعريف:** يقال للحافة e أنها **برزخ** للبيان المتصل G، إذا كان البيان الناتج من إزالة الحافة e من G، (أي $(G-e)$ ) غير متصل. لاحظ الشكل 8-3، أن الحافة e هي برزخ.




**الشكل 8-3**

كما يقال لأي بيان لا يحتوي على دارات بأنه **غابة (Forest)**، واضح أن مركبات أي غابة هي أشجار. هكذا فأن الشجرة هي غابة مكونة من مركبة واحدة فقط. يمكن ملاحظة أن الشجرة ليس لها تعريفا وحيدا، للتعرف على التعاريف الأخرى ، نأخذ بعض خواص الأشجار.

## بعض خواص الأشجار :

**المبرهنة 1.8:** ليكن T بيانا عدد رؤوسه n، العبارات الآتية متكافئة :

**1.** T هي شجرة.

**2.** يوجد بين كل رأسين في T درب وحيد.

**3.** T متصل وكل حافة فيه برزخ.

**4.** T متصل وعدد حافاته $(n-1)$.

**5.** عدد حافات T هو $(n-1)$ ولا يحتوي على دارات.

**6.** لا يحتوي T على دارات ، ولكن إذا وصلنا أي رأسين غير متجاورين فيه نحصل على بيان يحتوي على دارة واحدة فقط.

**البرهان : (1) يؤدي إلى (2) :**

ليكن $u$ و $v$ هما أي راسين في $T$ لما كان $T$ متصلا . فانه يوجد درب واحد على الأقل بين $u$ و $v$ . لنفرض أن الحافة $\{x,y\}$ في $p_1$ وليست في $p_2$ إن هذا الفرض يؤدي إلى وجود درب $p$ بين الرأسين $x$ و $y$ ولا يحتوي على الحافة $\{xy\}$ وعليه فان $p$ يكون مع الحافة $\{xy\}$ دارة في $T$ مما يناقض كون $T$ شجرة وبذالك فان $p_1 = p_2$ . وهكذا يوجد بين كل راسين في $T$ درب وحيد.

**(2) يؤدي إلى (3):**

واضح أن $T$ متصل، لتكن $e=\{uv\}$ أية حافة في $T$ ، البيان الناتج من $T$ بإزالة الحافة $e$ يكون غير متصل ، لأنه إذا كان متصلا فانه يؤدي إلى وجود درب بين $u$ و $v$ في $T$ ، وهذا بدوره يؤدي إلى وجود دربين مختلفين بين $u$ و $v$ في $T$. مما يناقض وجود درب وحيد بين كل راسين في $T$. وعليه . فان $e$ برزخ.

**(3) يؤدي إلى (4):**

سنبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على $n$ أن عدد حافات $T$ هو $(n-1)$.

واضح انه إذا كان $n=1$، فان عدد حافات $T$ هو 0، أما إذا كان $n=2$ ، فان عدد حافات $T$ هو 1 .

الآن نفرض أن (3) تؤدي إلى (4) عندما يكون عدد رؤوس $T$ اقل من $n$.

لنأخذ الحالة عندما يكون عدد رؤوس $T$ هو $n$، بما أن كل حافة في $T$ هي برزخ ، فان إزالة حافة $e$ من $T$ تؤدي إلى مركبتين $T_1$ و $T_2$ ، وبما أن كلا من $T_1$ و $T_2$ متصل وان كل حافة في أي منهما هي برزخ ، فانه بموجب فرضية الاستقراء الرياضي يكون عدد حافات $T_1$

هو $(n_1-1)$ وعدد حافات $T_2$ هو $(n_2-1)$، حيث أن $n_1$ و $n_2$ هما عدد رؤوس $T_1$ و $T_2$ على الترتيب . إذا عدد حافات $T$ هو

$$(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1 \;.$$

**(4) يؤدي إلى (5):**

نحتاج أن نبرهن أن $T$ لا تحتوي على دارات ، فإن احتوت $T$ على دارة ، فأن إزالة أية حافة من هذه الدارة يؤدي إلى بيان متصل عدد رؤوسه $n$ وعدد حافاته $(n-2)$ ، وهذا يناقض المبرهنة " إذا كان $G$ بيانا بسيطا متصلا عدد رؤوسه $n$ وعدد حافاته $m$، فأن $m \geq n-1$". إذا $T$ لا تحتوي على دارات.

**(5) يؤدي إلى (6):**

نبرهن أولا على أن $T$ متصل . فإذا كانت $T_1,T_2,...,T_k$ مركبات $T$، فان كلا من هذه المركبات خال من الدارات ومتصلة، وبذلك فانه شجرة . ولما كان (1) يؤدي إلى (4)، فان عدد حافات $T_i$ هو $(n_i-1)$، حيث أن $n_i$ عدد رؤوس $T_i$, لكل $i=1,2,...,k$، وعليه فان عدد حافات $T$ هو $(n-k)$، ومنها نستنتج أن $k=1$، إذا $T$ بيان متصل. وهو بذلك شجرة. ولما كان (1) يؤدي إلى (2)، فان هناك دربا وحيدا بين كل راسين في $T$ ، فإذا كان $u$ و $v$ راسين غير متجاورين في $T$ ، فان إضافة حافة $\{uv\}$ إلى $T$ يؤدي إلى تكوين دارة واحدة فقط بسبب وجود درب وحيد بين الرأسين $u$ و $v$.

**(6) يؤدي إلى (1) :**

إذا لم يكن $T$ متصلا، فان إضافة حافة تصل بين راسين في مركبتين مختلفتين لا يؤدي إلى تكوين دارة في $T$, مما يناقض (6) وبذلك فان (6) تودي إلى كون $T$متصلا، أي أن $T$ هي شجرة .

**نتيجة 2.8:** عدد حافات الغابة المكونة من $n$ من الرؤوس و $k$ من المركبات هو $(n-k)$.

**نتيجة 3.8:** يوجد رأسان على الأقل بدرجة واحد في كل شجرة عدد رؤوسها لا يقل عن اثنين.

**المبرهنة 4.8:** كل شجرة لها مركز واحد أو مركزان متجاوران.

**البرهان:**

المبرهنة صحيحة عندما تكون الشجرة $K_1$ أو $K_2$ . لتكن $T$ أية شجرة عدد رؤوسها $n$، $n \geq 3$ . واضح أن الاختلاف المركزي $R(v)$ للرأس $v$ في $T$ هو المسافة بين $v$ ونهاية لـ $T$ . كما أن أية نهاية لـ $T$ لايمكن أن تكون مركزاً . فاذا كانت $T'$ الشجرة الناتجة من $T$ بحذف كل نهاية مع الحافة الواقعة عليها . فان الاختلاف المركزي $R'(v)$ في $T'$ لرأس $v$ في $T$ يقل بواحد عن الاختلاف المركزي $R(v)$ في $T$ لنفس الرأس $v$

وعليه . اذا كان $v_0$ مركزاً لـ $T$ . فان $v_0$ نفسه مركز لـ $T'$

اذا كررنا تطبيق حذف نهايات الشجرة . عندما لاتكون $K_1$ او $K_2$ . فاننا سوف نحصل على تتابع من أشجار لها نفس المراكز. ولما كانت $T$ منتهية . فاننا سوف نتوصل اخيراً الى $K_1$ أو $K_2$ . فاذا حصلنا على $K_1$ . فان الرأس الوحيد في $K_1$ هو المركز الوحيد لـ $T$ . واذا حصلنا على $K_2$ . فانرأسي $K_2$ هما مركزاه . وهما في الوقت نفسه مركزا $T$ .

**انتهى البرهان.**

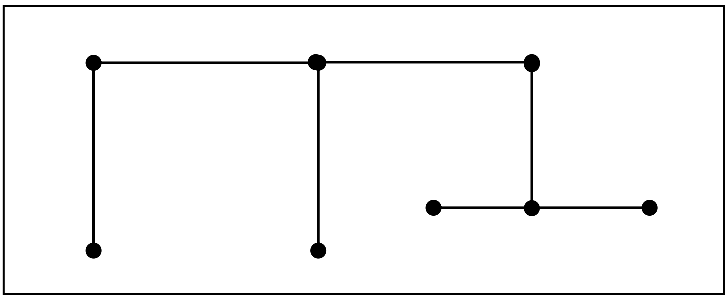
## تمارين :

**1**. برهن أن البيان المتصل G متصل والذي عدد حافاته $(p-1)$ هو بيان لا يحتوي على دارة.

**2**. برهن النتيجة .2.8

**3**. برهن النتيجة .3.8

4. ليكن G بيانا موضح بالشكل (8-4) جد المركز أو المركزان له.



**الشكل (8-4)**

**5**. أعط مثالا لشجرة تحوي على مركز واحد فقط .