أي إن قيمة شهادة التوفير بعد 12 شهرا سوف تصبح 22536.5 ديناراً، ويكون مجمل الأرباح خلال السنة الأولى: $a_{12} - C = 22536.5 - 20000 = 2536.5$ دينار.

لحساب عدد السنين اللازمة لكي تتضاعف قيمة هذه الشهادة، أي إيجاد قيمة n التي عندها k=2:

$$n = \frac{\ln(k)}{\ln(1+\alpha)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1+0.01)} = 69.6607 \cong 70.$$

أي بعد 70 شهرا (أي خمس سنوات و 10 أشهر) سوف تصبح قيمة هذه الشهادة الضعف، أي 40000 دينار.

5-8-3 رَهْن بيت Mortgaging a Home:

اشتُري بيت بمبلغ C دينار، ودُفع مبلغ أولي مقداره A دينار من قيمة البيت، وقُسّطت المبلغ المتبقي بأقساط شهرية مقدارها M دينار، وبفائدة شهرية مقدارها α %.

أ- اكتب النموذج الحركي المعبّر عن المبلغ الشهري المطلوب لهذا البيت.

ب- جد الحل للنموذج الحركي.

ت- جد عدد الأشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت.

ث- جد مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد.

ج- افرض أن ثمن البيت هو C=150 مليون دينار، ودُفع مبلغ A=50 مليون دينار من قيمة البيت، وقُسّط المبلغ المتبقي على أقساط شهرية مقدارها M=5 مليون دينار، وبفائدة شهرية مقدارها $\alpha = 0.02$. اكتب برنامجا حاسوبيا يقوم بحساب المبالغ المتبقية في ذمة المشتري في نهاية كل شهر، وجد عدد الأشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت. ما هو مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد؟

الحل:

أ- نفرض أن المتغير b_n يمثل الدَين المطلوب من المشتري بعد n من الأشهر من شراء البيت. وكما هو واضح من معلومات هذه المسألة فإن النموذج الرياضي على النحو الآتي:

الدَين المطلوب في الشهر n+1 = **الدَين المطلوب في الشهر** n + **فائدة الشهر** n - **قسط الشهر** n.

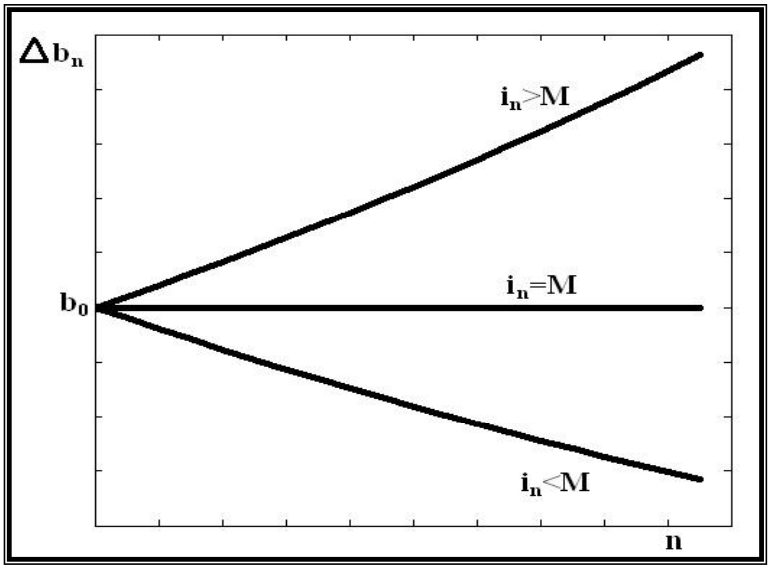
ولو فرضنا أن D=C-A يمثل المبلغ المتبقي في ذمة المشتري عند الشراء، فيكون النموذج الرياضي على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + \alpha b_n - M = (1+\alpha)b_n - M;\ n = 0,1,2,... \\ b_0 &= D. \end{aligned} \qquad (9\text{-}5)$$

يلاحظ في هذا النموذج أن الفرق:

$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = \alpha b_n - M$.

وهذا يعني أن الذي يحدد اتجاه الدَين هو الفرق بين المبلغ المضاف والناجم عن الفائدة $i_n = \alpha b_n$ ومقدار القسط الشهري M : فإذا كان المبلغ المضاف والناجم عن الفائدة i_n أكبر من القسط الشهري M ، فإن دَين المشتري سوف يزداد باستمرار، وبالنتيجة سوف لا يستطيع المشتري من تسديد الدَين إلى الأبد. أما إذا كان i_n أقل من M ، فان الدَين سوف ينتهي بعد مدة محددة من الزمن. وبطبيعة الحال، إذا كان $i_n = M$ فان الدَين سوف يبقى كما هو دون زيادة أو نقصان، أنظر الشكل (5−1).



الشكل (5−1): اتجاه الدَين.

ب− بمقارنة النموذج السابق بالمعادلة الفرقية (5−1)، نجد أن: $c_0 = -M$ و $c_1 = 1 + \alpha$. ومن الحل (5−2) نستنتج أن الحل للنموذج الحركي على النحو الآتي:

$$b_n = \frac{M[1-(1+\alpha)^n]}{\alpha} + D(1+\alpha)^n;\ n = 0,1,2,... \qquad (10\text{-}5)$$

ت− لإيجاد عدد الأشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت، نعوض في المعادلة الأخيرة عن $b_n = 0$ ، ثم نحل المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة n كالسابق:

$$n = \frac{\ln(\frac{M}{M - \alpha D})}{\ln(1+\alpha)}. \qquad (11\text{-}5)$$

ث− مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد:

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha b_n ,$$

إذ إن n تمثل عدد الأشهر التي دُفعت فيها أقساط.

5-8-4 اضمحلال الراديوم Radium Decay:

كما هو معروف فإن الراديوم هو عنصر مشع Radioactive Element، وان نسبة اضمحلاله هي 1% لكل 25 سنة. وهذا يعني أن الكمية المتبقية من هذا العنصر في بداية كل 25 سنة تساوي الكمية نفسها في بداية الـ 25 سنة السابقة مطروحا منها 1% من تلك الكمية. أي إنه: إذا كانت x_0 تمثل الكمية الابتدائية من الراديوم، فإن x_n تمثل كمية الراديوم المتبقية بعد 25n من السنين. في ضوء هذه المعطيات يمكن بيسر استنتاج النموذج الرياضي الآتي لكمية الراديوم المتبقية بعد 25n من السنين:

$$x_{n+1} = x_n - 0.01x_n = 0.99x_n;\ n \in N.$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (5-1) نجد أنها مماثلة لها وأن $c_0 = 0$ و $c_1 = 0.99$.

ومن المعادلة (5-2) نجد بان الحل هو:

$$x_n = 0.99^n x_0;\ n = 1,2,3,...$$
$$x_0 = 100.$$

والجدول الآتي يبين النسبة المئوية من كمية الراديوم المتبقية من الكمية الابتدائية x_0 بعد 100،500، 1000، 2000 و 4000 سنة.

الجدول(5-3): النسبة المئوية من كمية الراديوم المتبقية من الكمية الابتدائية x_0 بعد مدد زمنية مختلفة.

المدة الزمنية (سنة)	100	500	1000	2000	4000
n	4	20	40	80	160
النسبة المئوية من كمية الراديوم المتبقية $x_n = 0.99^n$	%96	82%	67%	45%	20%

وكما هو واضح من الجدول السابق فإن اضمحلال الراديوم بطيئ جدا وبحيث تبقى نسب كبيرة منه ولمدد زمنية طويلة. والبرنامج الآتي، واسمه **RadiumDecay**، وهو مرفق في القرص المدمج، يوضح كمية الراديوم المتبقية $x_n = 0.99^n x_0$ من الكمية الابتدائية $x_0 = 100$، ولغاية 10000 سنة، $n = 1,2,3,...,400$.

تمارين

5–1 اكتب أول خمسة حدود للمتتاليات المولّدة من كل من النماذج الآتية:

i- $a_{n+1} = 3a_n \;; n\varepsilon N$
$a_0 = 1.$

ii- $a_{n+1} = 2a_n + 6 \;; n \in N.$
$a_0 = 0$

iii- $a_{n+1} = 2a_n(a_n + 3) \;; n \in N.$
$a_0 = 4.$

iv- $a_{n+1} = a_n{}^2 \;; n \in N$
$a_0 = 0.$

v- $\Delta a_n = \frac{1}{4} a_n \;; n = 1,2,3,...$
$a_0 = 4.$

vi- $\Delta a_n = 1.5(100 - a_n) \;; n = 1,2,3,...$
$a_0 = 200.$

5–2 اكتب النموذج الرياضي للنظام الحركي لكل من المتتاليات الآتية:

i- A={1,1,1,1 ,…}.

ii- B={1, 4, 16, 64, 256, …}.

iii- C={1, 7, 19, 43, 91, …}.

iv- D={2, 5, 11, 23, …}.

v- E={1, 8, 29, 92, …}.

5–3 حل كلاً من المعادلات الفرقية الآتية:

i- $a_{n+1} = a_n + 3 \;; n \in N$
$a_0 = 0$

ii- $a_{n+1} = 2a_n + 1 \;; n \in N$
$a_0 = 1$

iii- $a_{n+1} = 0.5a_n + 3 \;; n \in N$
$a_0 = 2$

iv- $a_{n+1} = 3n + 2 \;; n \in N$
$a_0 = 0$

Ans. 3n, $-1 + 2^{2n}$, $6 - 4(0.5^n)$, $3^n - 1$.

4 5 اكتب النموذج الرياضي للنظام الحركي لكل من المتتاليات الآتية ثم جد الحل:

i- {0, 2, 4, 6, 8, …}.

ii- {1, 3, 5, 7, 9, …}.

iii- { 2, 8, 26, 80, 162,…}.

iv- { 1, 5, 13, 29, 61, …}.

Ans. $a_n = 2n$, $a_n = 1+2n, 3^n - 1$, $2(3^n)+1$.

5–5 إذا كان النموذج الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو:

$a_{n+1} = 2 + a_n;\ n \in N$

$a_0 = 1.$

أ– جد أول ستة حدود من هذه المتتالية.

ب– جد الحد الخامس والعشرين والحد التسعين من هذه المتتالية.

ت– ما هو الحد في هذه المتتالية والذي قيمته 199؟

Ans. {1, 3, 5, 7, 9, 11, …}, 49, 179, المائة .

6–5 أدخلت علبة باردة درجة حرارتها 0 درجة مئوية إلى داخل غرفة درجة حرارتها 30 درجة مئوية، وبعد 5 دقائق أصبحت درجة حرارتها 3 درجات مئوية:

أ– كم ستكون حرارة العلبة في دقائق النصف الساعة القادمة؟

ب– بعد كم دقيقة سوف تتساوى تقريبا درجة حرارة العلبة بدرجة حرارة الغرفة؟

Ans. أ-

n	5	10	15	20	25	30
T_n	3	5.7000	8.1300	10.3170	12.2853	14.0568

ب -.ثلاث ساعات ونصف

ملاحظة:

يمكن بيسر إجراء تجربة عملية للتحقق من قانون نيوتن للتبريد وعلى النحو الآتي. خذ كوب ساخن من الشاي أو القهوة، أو قنينة باردة من مشروب غازي، وقم بقياس درجة حرارته كل خمس دقائق ولمدة نصف ساعة (أي ست قراءات). كذلك قم بقياس درجة حرارة الغرفة. استخدم أول قراءتين لتقدير معلمة النموذج k، ثم استخدم النموذج الرياضي لتقدير درجة حرارة السائل الذي قمت بقياس درجة حرارته للفترات الأربع المتبقية. قارن بين نتائج التجربة الواقعية ونتائج النموذج وذلك بحساب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل قراءة، وكذلك معدل مربع الخطأ للقراءات.

7–5 شهادة توفير قيمتها الابتدائية C=10000 دينار تتقاضى فائدة شهرية مقدارها 0.5 % .

أ– اكتب النموذج الحركي لقيمة هذه الشهادة.

ب– جد الحل للنموذج الحركي.

ت– جد مقدار الربح الشهري من هذه الشهادة.
ث– جد عدد الأشهر اللازمة لكي تتضاعف فيها قيمة شهادة التوفير k=2.5 من المرات.
ح– ارسم قيمة هذه الشهادة منذ الشهر الأول ولمدة عشر سنوات.

Ans.

$a_{n+1} = (1.005)a_n;\ n \in N$, $a_0 = 10000$. $a_n = 10000(1.005)^n;\ n \in N$, $p_{n+1} = 50(1.005)^n;\ n \in N$,

184.

5–8 في إحدى المناطق الصناعية تتم معالجة مياه مجاري الصرف الصحي لإنتاج أسمدة صالحة للاستعمال ومياه صالحة للزراعة وذلك بإزالة المواد الملوثة منها. فإذا علمت أن 12% من المواد الملوثة يتم إزالتها في الساعة الواحدة.

أ– ما نسبة مياه مجاري الصرف الصحي التي يمكن معالجتها في اليوم الواحد؟ (احتسب اليوم 24 ساعة عمل).

ب– ما هو عدد الساعات التي تستغرقها معالجة نصف مياه مجاري الصرف الصحي؟

ت– ما هو عدد الساعات التي تستغرقها معالجة 10% من مياه مجاري الصرف الصحي؟

تلميح: افرض أن a_0 يرمز إلى الكمية الابتدائية من المواد الملوثة، و a_n يرمز إلى كمية المواد الملوثة المزالة بعد n ساعة من المعالجة، فيكون النموذج الحركي هو $a_{n+1} = 0.88a_n$.

Ans. $0.0465\,a_0$, 5.42, 18.01.

5–9 اشتُريت سيارة بمبلغ C=8 ملايين دينار، ودُفع نصف الثمن وقُسّطت المبلغ المتبقي على أقساط شهرية مقدارها M=150000 دينار، وبفائدة شهرية مقدارها 3%.

أ– اكتب النموذج الحركي المعبّر عن المبلغ الشهري المطلوب عن هذه السيارة

ب– جد الحل للنموذج الحركي.

ت– جد عدد الأشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن السيارة.

ث– ما مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد؟

Ans. ت–55 , ث– 4.17 مليون دينار.

5–10 أودع شخص نصف مليون دينار في احد المصارف التي تدفع فائدة شهرية مقدارها 0.5%. فإذا كان هذا الشخص يضيف إلى رصيده 50000 دينار شهريا:

أ– اكتب النموذج الحركي للرصيد الشهري لهذا الشخص ثم جد الحل.

ب– كم سوف يكون رصيد هذا الشخص في نهاية السنة الأولى من الإيداع؟

ت– جد السلوك بعيد المدى لرصيد هذا الشخص.

5–11 اكتُشفت جمجمة بشرية قُرْب بقايا معسكر قديم. وقد حصلت قناعة لدى علماء الآثار أن عمر الجمجمة بعمر المعسكر الأصلي. وقد وجد من التحليل ألمختبري بان 1% من الكمية الأصلية للكاربون–14 Carbon-14 لا تزال باقية في الأخشاب المحروقة في ذلك المعسكر. فإذا علمت أن الكاربونِ–14 يضمحل بنسبة تتناسب مع الكمية الباقية، وأن الكاربون–14 يضمحل

50 % على مدى 5700 سنةً. استخدم المعلومات المعطاة لصياغة نموذج رياضي للاستفادة من الكاربون–14 في تحديد عمر تلك الجمجمة.

5–12 دواء معين يكون فعالا في معالجة مرض معين إذا كان تركيزه في الدم يبقى أكثر من 100 ملغرام لكل لتر. فإذ علمت بان التركيز الابتدائي لهذا الدواء هو 640 ملغرام لكل لتر، وكان معروفا بان هذا الدواء يضمحل بنسبة 20% من الكمية الموجودة لكل ساعة.

أ– صغ نموذجا رياضيا لتمثيل مقدار تركيز الدواء لكل ساعة.

ب– اعمل جدولا لتراكيز الدواء لكل ساعة وبين بعد كم ساعة سوف يصل تركيز الدواء 100 ملغرام لكل لتر.

5–13 استخدم النموذج الرياضي في التمرين السابق لتحديد جرعة ابتدائية من الدواء وجرعة محافظة تُبقي تركيز الدواء فوق مستوى الفاعلية والذي مقداره 500 ppm، ولكن دون مستوى الأمان والبالغ 1000ppm . جرّب عددا من القيم لحين الحصول على نتائج مُرضية.

5–14 فرض أنك تريد شراء سيارة جديدة، وأمامك ثلاثة خيارات لنوع السيارة: إما A أو B أو C. فإذا كانت العروض التي أمامك كما مبينة في الجدول الآتي.

نوع السيارة	سعر السيارة (دولار)	المبلغ الواجب دفعة كمقدّمة (دولار)	نسبة الفائدة الشهرية	عدد أشهر تسديد الدَين
A	13990	1000	%3.5	60
B	13550	1500	%4.5	60
C	12400	500	%6.5	48

فإذا كان بإمكانك دفع ما لا يزيد عن 475 دولار شهريا لتسديد دَين السيارة، استخدم نموذج نظام حركي لإيجاد أي العروض الثلاثة يتناسب مع قدراتك المادية.