الفصل الثالث عشر

نمذجة النمو والاضمحلال

Modeling Growth and Decay

13-1 مقدمة

لقد تناول الفصل الخامس عددا من المسائل في نمذجة التغيير، والتي يكون فيها الزمن متقطعاً، والتي نُمذجت باستخدام معادلات فرقية. ومن تلك المسائل: قانون نيوتن للتَبريد، واضمحلال الدجوكسين في مجرى الدمّ، واضمحلال الراديوم. وفي هذا الفصل، تعاد دراسة تلك المسائل، عندما يكون الزمن مستمراً، فضلاً عن مسائل أخرى تُنمذج باستخدام معادلات تفاضلية. تتضمن تطبيقات هذا الفصل علم الصيدلة، وميكانيك الموائع Fluid Mechanics، وعلم الذرة، وعلم الآثار. فضلا عن ذلك، فهناك مجالان تطبيقيان آخران، يتعلق الأول بخطر تناول المشروبات الروحية وعلاقته بحوادث السيارات، فيما يتضمن المجال الثاني نمذجة عمل الكلية الاصطناعية.

13-2 نماذج النمو والاضمحلال

إن نماذج النمو والاضمحلال عبارة عن نماذج رياضية تكون فيها نسبة النمو/الاضمحلال متناسبة مع القيمة الحالية للنموذج. فعندما يكون المتغير الذي نتعامل معه متقطعا يطلق على النمو/الاضمحلال: هندسي Geometric (لأن قيم النموذج تُكوّن متوالية هندسية). وعندما يكون المتغير قيد الدراسة مستمرا، فيطلق على النمو/الاضمحلال: أسي Exponential (لأنه يكون دالة بدلالة الدالة الأسية). ويُعرف النموذج الأخير أيضا باسم النموذج المالثوسي Malthusian Model، وهو النموذج نفسه الذي تعاملنا معه في الفصل السابق لنمذجة عدد السكان.

تتضمن تطبيقات نماذج النمو والاضمحلال طيفا واسعا من المجالات الحيوية. وكما لاحظنا في الفصل السابق فإن النمو السكاني في المجتمعات البشرية يكون نموا أسيا. كذلك في علوم الحياة فإن عدد الأحياء المجهرية في مُستنبَت تنمو نموا أسيا. وفي علم الفيزياء هناك تطبيقات عديدة في مجالات الالكترونيات والفيزياء الذرية وانتقال الحرارة. وفي علم الاقتصاد إذ إن النمو الاقتصادي والتسوّق متعدد المستويات، ويكون غالبا أسيا. وفي علم الاقتصاد تنمو الفوائد المركّبة نموا أسيا. وفي تقنيات الحاسوب تخضع قدرة المعالجة Processing Power للنمو الأسي، وفي نظرية التعقيد الحَوسبي Computational Complexity Theory تتطلب الخوارزميات الحاسوبية زيادة أسيّة في المصادر (مثل ذاكرة الحاسوب وزمن المعالجة).

لنفرض أن لدينا متغيرين $x(t)$ و $y(t)$، العلاقة بينهما متمثلة بالمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = ky(t), \qquad (1\text{-}13)$$

إذ إن k كمية ثابتة. إن هذه المعدلة يمكن حلها بيسر باستخدام طريقة فصل المتغيرات وعلى النحو الآتي:

$$\because \frac{dy(t)}{y(t)} = kdx(t)$$

$$\therefore \int \frac{dy(t)}{y(t)} = \int kdx(t)$$

فيكون حل المعادلة التفاضلية (13-1) هو:

$$\ln[y(t)] = kx(t) + c, \qquad (2\text{-}13)$$

إذ إن c ثابت التكامل. ولو كانت $y(t) = y(0)$ عندما x(t)=x(0)، وبالتعويض بالمعادلة السابقة، نجد أن:

$$\ln[y(0)] = kx(0) + c. \qquad (3\text{-}13)$$

وبطرح المعادلة (13-3) من المعادلة (13-2)، ينتج:

$$\ln[y(t)] - \ln[y(0)] = k[x(t) - x(0)].$$

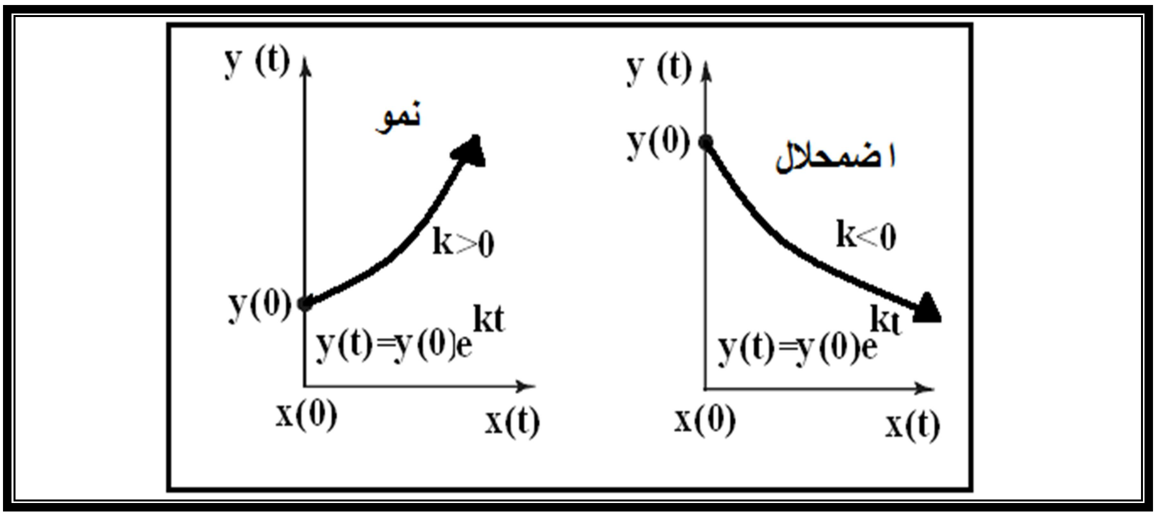
أي إن:

$$\ln[\frac{y(t)}{y(0)}] = k[x(t) - x(0)].$$

فيكون الحل النهائي للمعادلة (13-1) هو:

$$y(t) = y(0)e^{k[x(t)-x(0)]}. \qquad (4\text{-}13)$$

والشكل الآتي يوضح الحل السابق. فلو فرضنا أن $x(t) > x(0)$، فكما هو واضح، إذا كان الثابت k>0، فهذا يعني أن هناك نموا في قيم y(t)، وإذا كان k<0، فهذا يعني أن هناك اضمحلاً في قيم y(t). لقد تناول الفصل السابق نمذجة النمو السكاني بوصفها إحدى تطبيقات نماذج النمو، ويتناول هذا الفصل بعض التطبيقات الأخرى.



الشكل (13-1) حل المعادلة التفاضلية (13-1)

3-13 نمذجة خطر حوادث السيارات جراء تناول المشروبات الروحية

يتناول هذا التطبيق نمذجة العلاقة بين تناول المشروبات الروحية (الكحول) وحوادث السيارات. إن شرطة المرور فى العديد من الدول تقوم بمراقبة سواق السيارات وفحص نسبة الكحول لديهم للمحافظة على السلامة العامة. وكما هو معروف فهناك علاقة وثيقة بين تناول المشروبات الروحية وخطر وقوع حوادث السيارات، وتزداد نسبة الخطورة بزيادة نسبة تركيز المشروبات الروحية فى الدم. لذا فإن الفرضية التى سوف نفرضها هى أن المخاطرة النسبية Relative Risk لحوادث السيارات، التى سوف نرمز لها بالرمز R، تتناسب طرديا مع مستوى تركيز الكحول في الدم، الذي يرمز له بالرمز b. أي إن:

$$\frac{dR(b)}{db} \propto b.$$

وبتحويل هذا التناسب إلى معادلة، ينتج النموذج الرياضي الآتي:

$$\frac{dR(b)}{db} = kb.$$

إذ إن k ثابت التناسب. وكما هو معروف جيدا فان حل المعادلة التفاضلية الأخيرة هو:

$$R(b) = R(0)e^{kb},$$

إذ إن $R(0) = 1$ لأنه عند عدم تناول المشروبات الروحية، فلا توجد مخاطرة بوقوع حادث سيارة جراء تناولها. فيكون النموذج الرياضي النهائي هو:

$$R(b) = e^{kb}.$$

لإيجاد قيمة الثابت k، فقد وجد أنه عندما يكون مستوى الكحول فى الدم بنسبة b=0.14%، فإن نسبة الخطورة تكون R(b)=20%. وبالتعويض في المعادلة الأخيرة ينتج:

$$20 = e^{0.14k}.$$

$$\therefore k = \frac{\ln(20)}{0.14} = 21.4$$

والآن لو أردنا أن نوجد نسبة الكحول التي تؤدي نسبة خطورة معينة، فما علينا سوى حل النموذج السابق بدلالة R(b):

$$b = \frac{\ln[R(b)]}{k} = \frac{\ln[R(b)]}{21.4}.$$

البرنامج الآتى، واسمه AccRisk، يقوم برسم النموذج المقترح لنمذجة خطر حوادث السيارات جراء تناول المشروبات الروحية، فضلا عن حساب نسب الكحول التي تؤدي نسب خطورة 25% و 50% و 75% و 100%.

```
% Accident Risk by Alcohol Absorption
clear
clc
b=0:0.01:0.2152;
r=exp(21.4.*b);
```

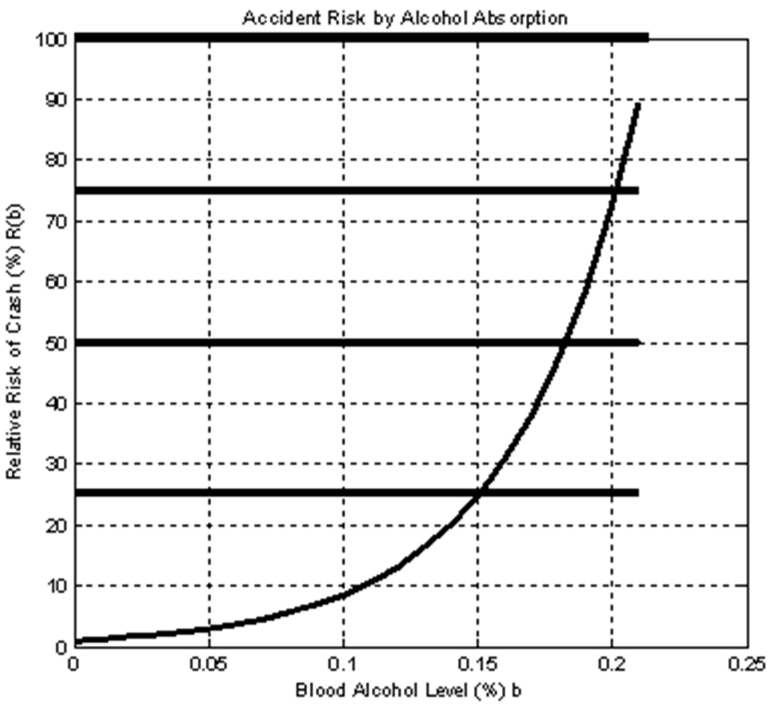
```
plot(b,r)
b25=log(25)/21.4
b50=log(50)/21.4
b75=log(75)/21.4
b100=log(100)/21.4
n=length(b);
bb25(1:n)=25;
bb50(1:n)=50;
bb75(1:n)=75;
bb100(1:n)=100;
plot(b,r,b,bb25,b,bb50,b,bb75,b,bb100)
title('Accident Risk by Alcohol Absorption ')
xlabel('Blood Alcohol Level (%) b')
ylabel('Relative Risk of Crash (%) R(b)')
grid
```

ونتائج البرنامج هي:

```
b25 =
   0.1504

b50 =
   0.1828
b75 =
   0.2018

b100 =
   0.2152
```



وكما هو واضح فإن النموذج يوضح الزيادة الأسية فى نسبة خطر حوادث السيارات جراء تناول المشروبات الروحية مع زيادة مستوى الكحول في الدم. ومن نتائج البرنامج يمكننا أن نكوّن الجدول الآتي.

الجدول (1-13) نسب الكحول التي تؤدي نسب خطورة معينة.

نسبة الكحول (%)	0.1504	0.1828	0.2018	0.2152
نسبة خطورة (%)	25	50	75	100

لذا، فحسب هذا النموذج، عندما تكون نسبة الكحول قرابة 0.22%، فإن نسبة خطر حوادث السيارات جراء تناول المشروبات الروحية ستكون 100% على وجه اليقين.