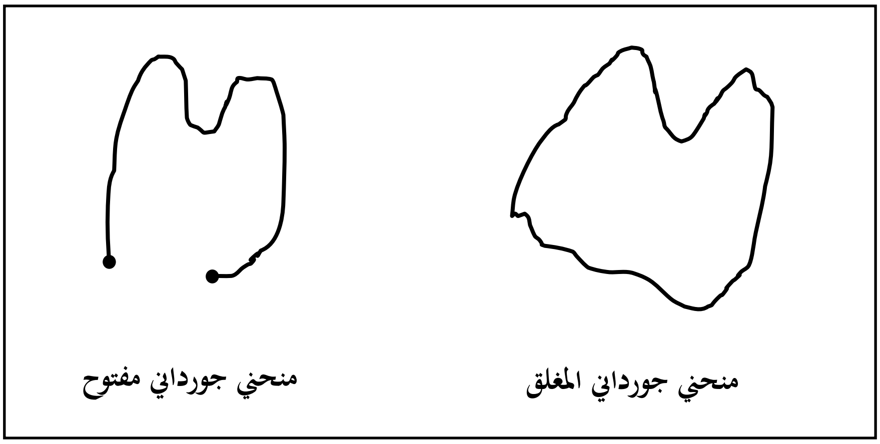
غمر البيانات (Embedding of Graphs) :

منحني جوردن المفتوح (open Jordan curve) : يعرف منحني جوردن المفتوح في المستوي أو الفضاء الاقليدي ذي الأبعاد الثلاثة أو على سطح جسم ما مثل الكرة أو الطرة، على أنه منحن مستمر في السطح لا يقطع نفسه، يصل بين نقطتين مختلفتين تسميان نهايتي المنحن.

منحني جوردن المغلق (closed Jordan curve) : على أنه منحني جوردن نهايتاه متطابقتان . (لاحظ الشكل (9−1)).



الشكل 9−1

نفرض أن الفضاء S هو الفضاء الذي يمكن أن نعرف عليه منحنيا جوردانيا (مفتوحا أو مغلقا).

ليكن c_1 و c_2 منحنين جوردانيين مفتوحين في فضاء S. يقال أن c_1 و c_2 متقاطعان (crossing) إذا وجدت نقطة في S مشتركة بينهما وهي ليست نهاية لأحدهما أو لكليهما.

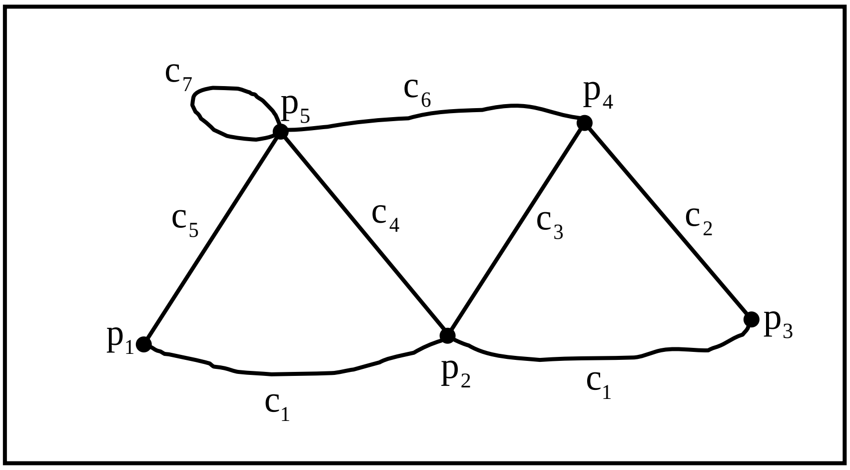
البيان الهندسي (geometric graph) : يعرف البيان الهندسي في فضاء S على أنه مجموعة من نقاط P مع مجموعة C من المنحنيات الجوردانية التي تحقق الشروط الآتية :

1. يحتوي كل منحن جورداني مفتوح في C على نقطتين فقط من P ، وهاتان النقطتان هما نهايتاه .

2. يحتوي كل منحن جورداني مغلق في C على نقطة واحدة فقط من P .

3. كل نقطة مشتركة بين منحنيين أو أكثر في C هي نقطة في P .

مثال 1 : في الشكل (9-2) لا يمثل بيانا هندسيا لأن المنحني الجورداني المفتوح c_1 يحوي على ثلاث نقاط من المجموعة $P=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ مما يناقض الشرط 1 .

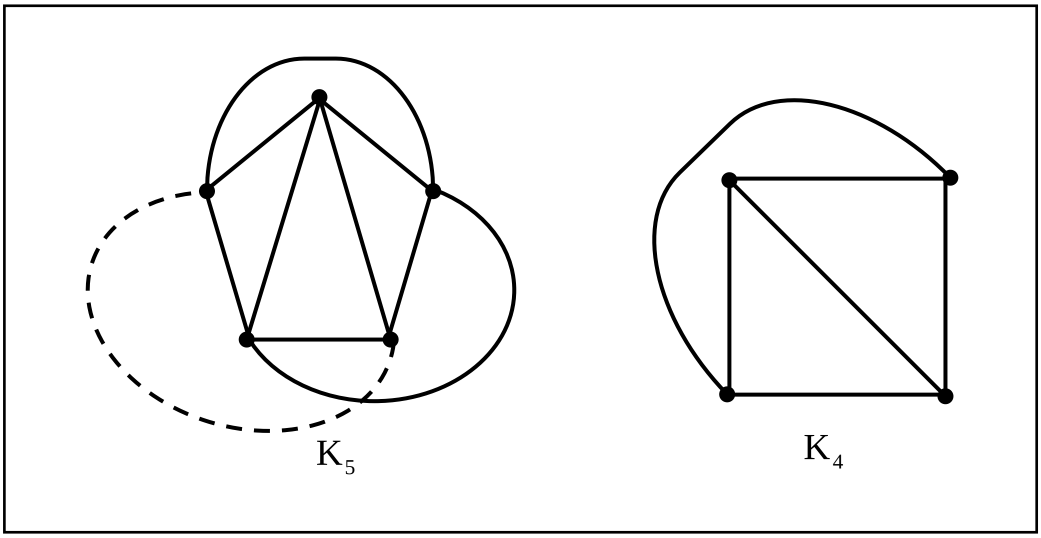


الشكل (9-2)

غمر البيان في فضاء S : ليكن G بيانا ما، يقال أن البيان G مغمور في S (أنه يمكن غمر بيان G في فضاء S) إذا كان G متشاكلا مع بيان هندسي H في S، أي يوجد تقابل متباين بين مجموعة رؤوس G ومجموعة نهايات المنحنيات في H، بحيث أن لكل رأسين v_1 و v_2 في G ، إذا كان $p_1 \leftrightarrow v_1$ و $p_2 \leftrightarrow v_2$ ، فأن عدد الحافات التي تصل الرأسين v_1 و v_2 في G يساوي عدد المنحنيات الجوردانية التي نهايتا كل منها p_1 و p_2 .

البيان المستوي (planner graph) : إذا كان G بيانا مغمورا في المستوي فأنه يمكن تمثيل G هندسيا في المستوي بحيث لا يوجد تقاطع بين أية حافتين في نقطة ليست رأسا لأحدى (أو كلتا) الحافتين وعند ذلك نقول لهذا البيان أنه بيان مستو.

مثال 2: البيان التام K_4 يكون بيان مستو بينما البيان التام K_5 هو بيان غير مستو (أي أنه لا يمكن غمر K_5 في المستوي). (لاحظ الشكل (9−3)).



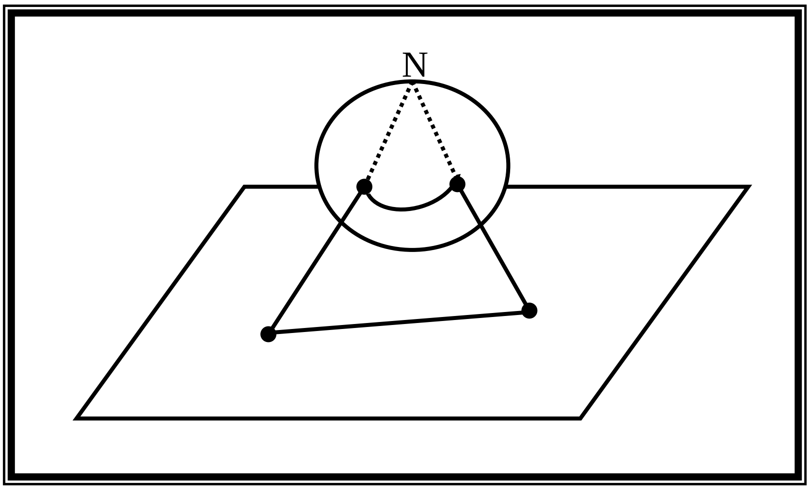
الشكل 9−3

المبرهنة1.9: كل بيان منته يمكن غمره في الفضاء الاقليدي الثلاثي الأبعاد R^3.

المبرهنة 2.9: يمكن غمر أي بيان غير منته $G=(V,E)$ في الفضاء الاقليدي الثلاثي الأبعاد R^3 إذا وفقط إذا وجد تقابل متباين بين V ومجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ، كذلك وجود تقابل متباين بين E ومجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

المبرهنة 3.9: يكون البيان مستويا إذا وفقط إذا أمكن غمره في سطح كرة .

البرهان : لنفرض أن G بيان مغمور في سطح كرة . نضع تلك الكرة على سطح أفقي بحيث لا يقع قطبها الشمالي N (أي النقطة على سطح الكرة التي تقابل تماما نقطة تماسها مع المستوي باعتباره اخذ أفقيا) على أية حافة من G، وطبيعي أنه ليس رأسا في G. كما هو موضح بالشكل (9−4).

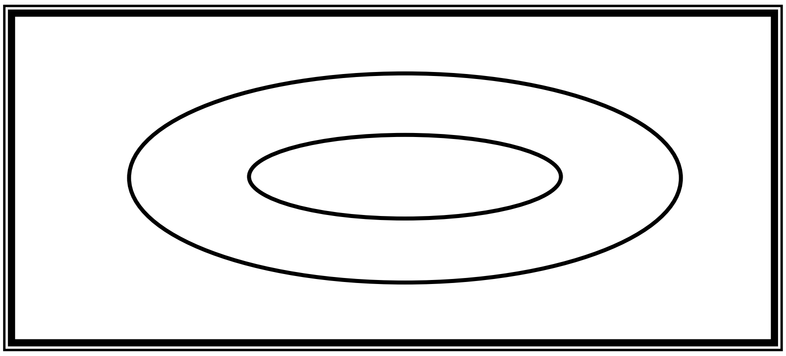


الشكل (9-4)

نحصل على تمثيل G في المستوي بإتباع إسقاط استريوغرافي (Stereographic projection) مركزه بالنقطة N ، فنصل كل نقطة من نقاط حافات G المرسوم على سطح كرة بالنقطة N بمستقيم نمده حتى يلتقي مع المستوي فنحصل من نقاط التلاقي هذه على إسقاط لـ G على المستوي ، نظرا لعدم وجود تقاطع بين أية حافتين من حافات G المرسوم على سطح كرة ، فأنه لا يوجد تقاطع بين أية حافتين في مسقطه على المستوي ، لأن هذا الإسقاط هو في الحقيقة تقابل متباين ، لذلك فأن G بيان مستو.

العكس : إذا كان G بيانا مستويا ، أي مغمور في المستوي فأننا نتبع الإسقاط نفسه المذكور آنفا للحصول على تمثيل لـ G على سطح كرة ، وذلك بوصل كل نقطة من حافات G بمستقيم إلى النقطة N (مركز الإسقاط) إذ تُكّون نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع سطح الكرة تمثيلا لـ G على سطح الكرة دون أن يكون هنالك تقاطع بين أية حافتين ، وبذلك يمكن غمر G على سطح كرة. **انتهى البرهان.**

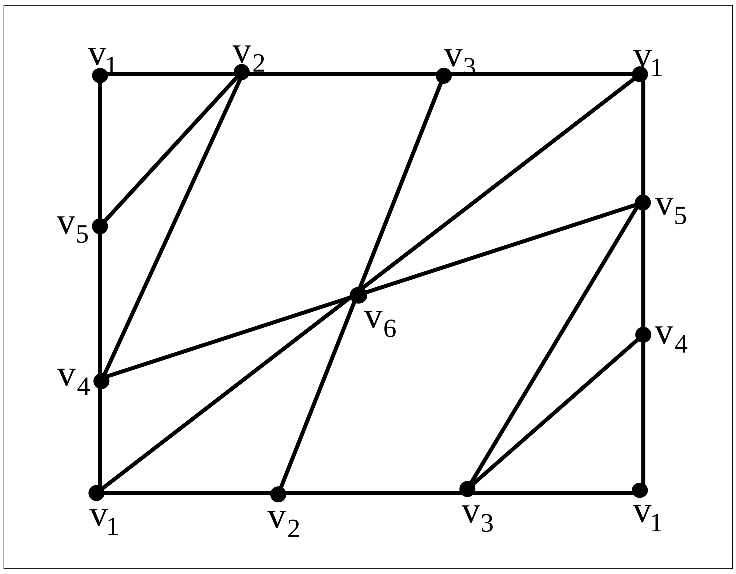
من المبرهنة أعلاه يمكن أن نستنتج أنه لا يمكن غمر البيانات غير المستوية في سطح كرة ، ولكن هل يمكن غمر بعض البيانات غير المستوية في سطوح أخرى ، كسطح الطرة (Torus) مثلا ؟ ، أنظر الشكل (9−5). إذ يمكن الحصول على سطح طرة من مستطيل بانطباق كل ضلعين متقابلين فيه



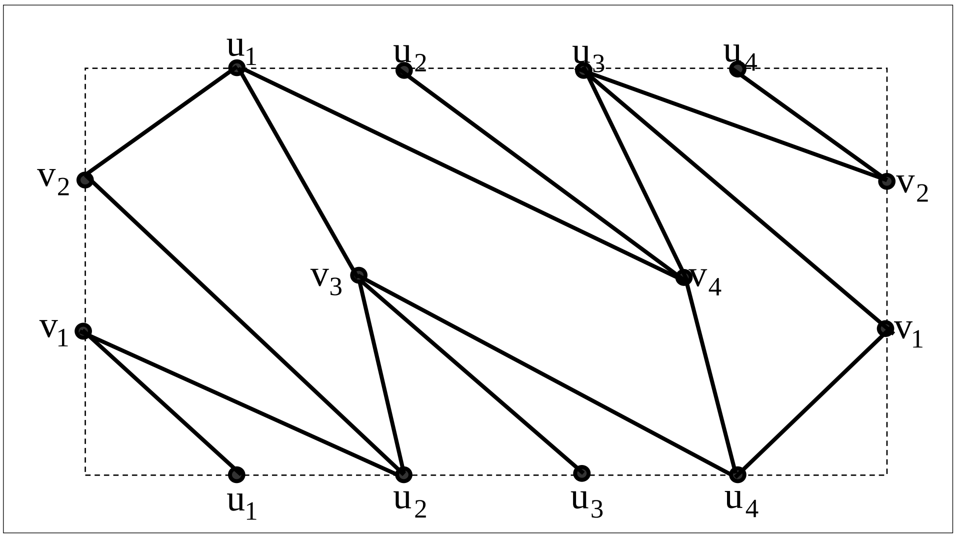
الشكل (9−5) الطرة

الجواب نعم ، يمكن غمر بعض البيانات غير المستوية على سطوح أخرى غير سطح الكرة ، فمثلا يمكن غمر البيانات الغير مستوية ، مثلا $K_{4,4}$ و K_6 على سطح الطرة.

مثال3 : مثل كل من البيانين K_6 و $K_{4,4}$ على سطح الطرة .



الشكل (9−6) البيان التام K_6



الشكل (9−7) البيان التام $K_{4,4}$

الآن نعرف عدد التقاطع (the crossing number) لبيان G بأنه أصغر عدد من التقاطعات للحافات ، بحيث أنه لا يسمح بالتقاطع أكثر من حافتين في نقطة واحدة. واضح أن $v(G)=0$ إذا وإذا فقط كان G بيانا مستويا.

تمارين :

1. أثبت أن كل بيان جزئي من بيان مستو يكون بيانا مستويا .
2. اذكر كل قيم m و n بحيث يكون البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$ بيانا مستويا.
3. جد كلا من $v(K_7)$ ، $v(K_5)$ ، $v(K_{3,3})$.
4. هل يوجد هناك سطوح أخرى يمكن غمر فيها البيانات الغير مستوية؟، إذا كانت الإجابة بنعم اذكرها.
5. أثبت المبرهنة 1.9.