الفصل السادس

الأنظمة اللاخطية و الأنظمة متعددة الأبعاد

Non Linear and Muli-Dimensional Systems

6-1 مقدمة:

يتناول هذا الفصل النمذجة الرياضية لنوعين مهمين جدا من النظم الحركية في التطبيقات المختلفة. أما النوع الأول فهو الأنظمة اللاخطية، وهي الأنظمة التي تُنمذج بمعادلات فرقية غير خطية. وسوف يتم التركيز بشكل خاص على النموذج المعروف بالنموذج اللوجستي والذي يستخدم على نطاق واسع في التطبيقات. وأما النوع الثاني فهو الأنظمة التي تضم أكثر من متغير واحد. وسوف يُختتم الفصل بعدد من التطبيقات التي تضم دراسة حالات مختلفة.

6-2 الأنظمة اللاخطية:

لنفرض أن لدينا نظاما أحادي البُعد، مستقلاً ذاتياً وغير خطي منمذجاً بمعادلة فرقية تُنظم تَطور المتغيّر x_n بتغيّر الزمن:

$$x_{n+1} = f(x_n);\ n = 0,1,,2,3,... \qquad (1\text{-}6)$$

وعادة تكون f دالة مستمرة وقابلة للتفاضل، كما أن القيمة الابتدائية x_0 تكون معطاة. لقد تناولنا في الفصل السابق دراسة تفصيلية لمثل هذه الدالة عندما تكون الدالة f على شكل $f(x_n) = c_0 + c_1 x_n$ ، وهذه الدالة تمثل علاقة خط مستقيم بين $f(x_n)$ و x_n ، لذا فهي تسمى علاقة خطيّة Linear. أما إذا كانت الدالة $f(x_n)$ على أي شكل رياضي آخر عدا الشكل الخطي السابق، مثل حدودية Polynomial أو دالة أسيّة Exponential Function أو دالة لوغاريتمية Logarithmic Function الخ، فإن النموذج الرياضي يسمى عندئذ نموذجا غير خطيّ Non-Linear. ومن نماذج النظم الحركية غير الخطية الشهيرة النموذج اللوجستي.

6-2-1 النموذج اللوجستي The Logistic Model:

النموذج اللوجستي عبارة عن معادلة فرقية من المَرتبة الأولى First Order ومن الدرجة الثانية Second Degree. ويعد هذا النموذج من الأمثلة المهمة والسهلة للنماذج الحركية غير الخطية. يعود اكتشاف هذا النموذج إلى العام 1844 أو 1845 إلى الرياضي البلجيكي بيير فيرهولست Pierre Verhulst (1804-1849) الذي اقترحه لدراسة مسائل ذوات علاقة بنمو السكان، انظر الفصل الثاني عشر.

إن النموذج اللوجستي يُمْكِنه أَن ينمذج المتغيرات التي يكون سلوكها يشبه الحرف S، كمنحنيات النمو Growth Curves: إذ إن هكذا سلوك يكون في البداية ذا طبيعة تشبه النمو الأسي Exponential Growth، ثم بعد الوصول إلى حالة إشباع Saturation يَتباطأُ النمو، ثم في حالة النضج Maturity، يتوقف النمو. وفي الوقت الحاضر فان تطبيقات هذا النموذج تغطي العديد من المجالات، مثل الشبكات العصبية الاصطناعية Artificial Neural Networks، عِلْم

الأحيـاء Biology، الرياضـيات الحياتيـة Biomathematics، عِلْـم السـكان Demography، الاقتصـاد Economics، الكيميـاء Chemistry، عِلْـم الـنفْس الرياضـي Mathematical Psychology، نظرية الاحتمال Probability Theory، عِلْم الاجتماع Sociology، عِلْم السياسة Political Science، علم الإحصاء Statistics، والنظم الحركية Dynamical Systems.

لنفرض أننا نهتم بدراسة التغيير في نسبة شيء معين يتغيّر بتغير الزمن، مثل التغيّر في نسبة البكتريا في بيئة معينة، والتغيّر في نسبة الإصابة بمرض معين في محيط معين، والتغير في نسبة مبيعات سلعة معينة في سوق معين. في مثل هكذا تطبيقات تكون أمامنا الفرضية الآتية:

نسبة وجود الشيئ عند الزمن n+1	تتناسب مع	نسبة وجوده عند الزمن n	و	نسبة عدم وجوده عند الزمن n

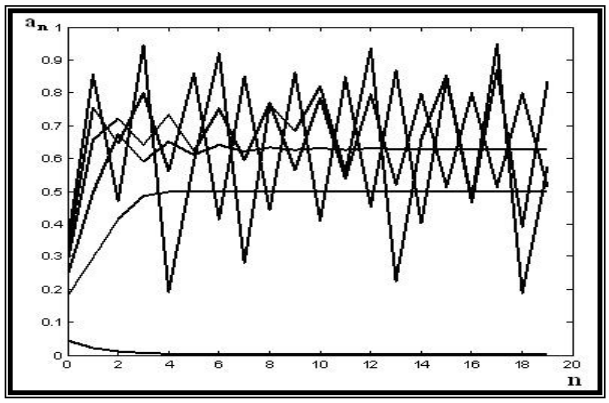
فلو كان المتغير x_n يرمز إلى نسبة وجود ذلك الشيئ عند الزمن n، فإن $1-x_n$ يرمز إلى نسبة عدم وجوده عند الزمن n. ومن الفرضية السابقة، وبعد تحويل التناسب إلى معادلة، مع ملاحظة أن "و and" تُحوّل إلى علامة الضرب دلالة على التفاعل Interaction، نتوصل إلى النموذج الرياضي الآتي:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n);\ \ n = 0,1,2,3,... \qquad \textbf{(2-6)}$$

إذ إن r كمية ثابتة تمثل نسبة النمو Growth Rate. ويعرف هذا النموذج بالنموذج اللوجستي في الزمن المتقطع، وسوف تُدرس بعض الجوانب النظرية لهذا النموذج في الفصل العشرين. كما سوف نتعامل أيضا مع هذا النموذج في الزمن المستمر وذلك في الباب الثالث بإذن الله تعالى.

على الرغم من سهولة البناء الرياضي لهذا النموذج، إلا أنه يتمتع بخصائص نظرية مهمة سوف ندرسها مفصلا لاحقا. كما أن قيمة المعلمة r تؤثر بشكل كبير على طبيعة القيم المولّدة من هذا النموذج. والشكل الآتي يبين رسم 20 قيمة مولّدة من هذا النموذج وذلك باختيار القيمة الابتدائية $x_0 = 0.1$ وقيم مختلفة من هذه المعلمة:

r=0.5, 2.0, 2.7, 3.2, 3.5, 3.8.



الشكل (6–2): 20 قيمة مولّدة من النموذج اللوجستي بالقيمة الابتدائية $x_0 = 0.1$ وقيم مختلفة من r.

6-2-2 تطبيقات:

المثال (6-1): (النمو في حجم مجتمع الحيتان)

إذا علمت أن حجم مجتمع الحيتان يكون مقيداً بظروف البيئة، وأنه إذا كان أقل من مستوى معين N_{min}، فانه يكون مهدداً بالانقراض في تلك البيئة. أما إذا كان أكبر من مستوى معين N_{max}، فإن أعدادها سوف تتناقص لأن البيئة لا تَستطيع تَحَمُّل أعداد كبيرة من الحيتان. نمذج حجم مجتمع الحيتان في تلك البيئة بعد n من السنين.

الحل:

نفرض أن x_n يمثل حجم مجتمع الحيتان في تلك البيئة في السنة n. لذا فإن $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ يمثل مقدار التغيير في حجم مجتمع الحيتان في سنتين متتاليتين. ومن معطيات هذه المسألة فإن Δx_n يتناسب مع كل من $(N_{max} - x_n)$ و $(x_n - N_{min})$. أي إن:

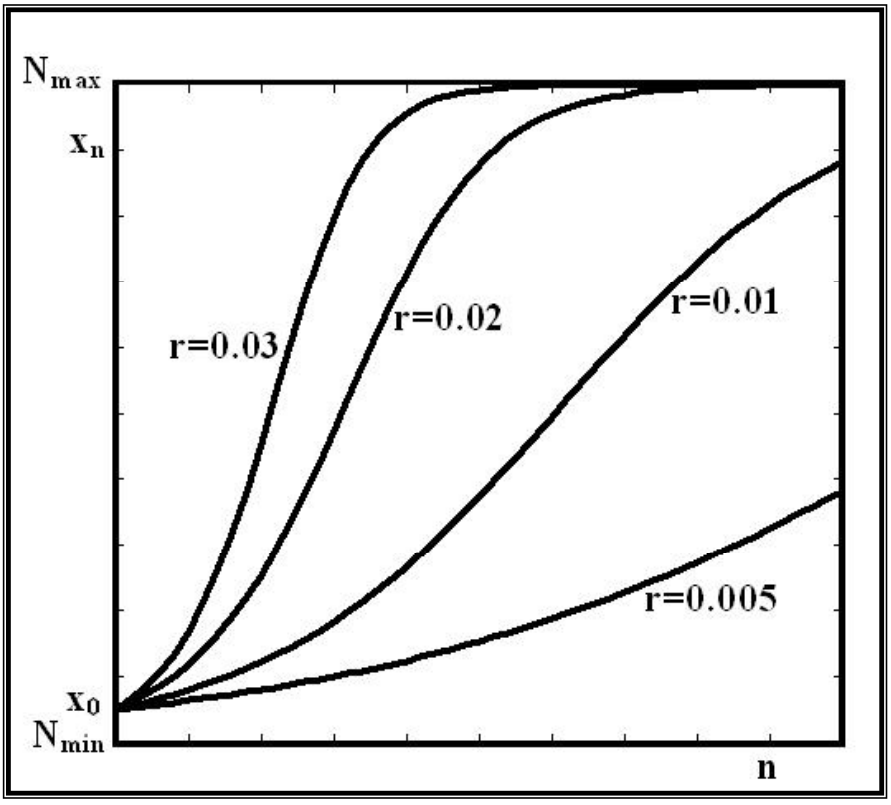
وبعد تحويل التناسب إلى معادلة يصبح النموذج بالشكل النهائي الآتي:

$$\Delta x_n = r(N_{max} - x_n)(x_n - N_{min}).$$

إذ إن r هو ثابت التناسب، أي إن:

$$x_{n+1} = x_n + r\,(N_{max} - x_n)(x_n - N_{min}); \quad n = 0,1,2,... \qquad (3\text{-}6)$$

والشكل الآتي يوضح الرسم الزمني لهذا النموذج ولقيم مختلفة من المعلمة r.



الشكل (6-5): الرسم الزمني للنموذج (6-3) ولقيم مختلفة من المعلمة r.

المثال (6–2): (انتشار مرض معدٍ)

افرض أن هناك N من الأشخاص في محيط ما، ما لا يقل عن واحد من هؤلاء الأشخاص مصاب بمرض معدٍ (أنفلونزا الخنازير مثلا). وبفرض وجود تفاعل بين المصابين وغير المصابين لنَقْل المرض، وعدم وجود أي علاج. نمذج أعداد المصابين بهذا المرض بهذا المحيط بعد n من الأيام. ارسم الرسم الزمني لعدد المصابين بهذا المرض في ذلك المحيط خلال الأسبوعين القادمين عندما يكون N=100 و نسبة النمو r=0.005 وعدد المصابين بهذا المرض $x_0 = 3$.

الحل:

نفرض أن المتغير x_n يرمز إلى عدد المصابين بهذا المرض وبهذا المحيط بعد n من الأيام. من معطيات المثال، نجد أن:

(التغيير في أعداد المصابين بهذا المرض ليوم غد) **يتناسب مع** (عدد المصابين بهذا المرض لهذا اليوم) **و** (عدد غير المصابين بهذا المرض لهذا اليوم).

أي إن:

$$\Delta x_n \propto x_n(N - x_n).$$

إذ إن $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. وبعد تحويل علامة التناسب إلى معادلة، نجد أن:

$$x_{n+1} = x_n + r x_n(N - x_n);\ n = 0,1,2,.... \qquad (4\text{-}6)$$

والبرنامج الآتي، واسمه SpreadDisease، يقوم بحساب والرسم الزمني لعدد المصابين بهذا المرض من ذلك المحيط خلال الأسبوعين القادمين عندما يكون N=100 ونسبة النمو r=0.005 وعدد المصابين بهذا المرض $x_0 = 3$.

6–3 الأنظمة متعددة الأبعاد:

لنفرض الآن أننا نتعامل مع m من المتغيرات (أو ما يطلق عليه متغير ذو بُعد m- Dimensional m)، ولتكن هذه المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_m$. ولو فرضنا أن كل متغير من هذه المتغيرات مُنمذج بمعادلة فرقية من المرتبة الأولى وعلى النحو الآتي:

$$x_{1(n+1)} = c_{10} + c_{11}x_{1(n)} + c_{12}x_{2(n)} + ... + c_{1m}x_{m(n)},$$

$$x_{2(n+1)} = c_{20} + c_{21}x_{1(n)} + c_{22}x_{2(n)} + ... + c_{2m}x_{m(n)},$$

.

.

$$x_{i(n+1)} = c_{i0} + c_{i1}x_{1(n)} + c_{i2}x_{2(n)} + ... + c_{im}x_{m(n)},$$

.

.

$$x_{m(n+1)} = c_{m0} + c_{m1}x_{1(n)} + c_{m2}x_{2(n)} + ... + c_{mm}x_{m(n)}$$