① (المحاضرة الاولى)

Statistical Inference (2)

* Interval Estimation (التقدير الفتروي)

Estimation

تقدير نقطي — Point estimate

تقدير فتروي — Interval estimate

التقدير نوعان

① التقدير النقطي (point estimate) وهو تقدير للقيمة الحقيقية للعلمة بحيث يعطي قيمة واحدة فقط وتناولناه في الفصل الاول، حيث تناولنا طريقتين من طرائق التقدير النقطي وهي

* مقدر الامكانة الاعظم (Maximum likelihood estimate)
* المقدر بطريقة العزوم (Estimator using moments method)

② التقدير الفتروي (Interval estimate)

We mean by an interval estimate, an estimate of the form

$$\hat{\theta_L} < \theta < \hat{\theta_u}$$

يعني انه التقدير الفتروي للعلمة يمثل فترة وليس قيمة واحدة فقط اي انه القيمة الحقيقية للعلمة تقع بين حدين حد اعلى ($\hat{\theta_u}$) وحد ادنى ($\hat{\theta_L}$)

$\hat{\theta_L}$ = lower limit of estimate

$\hat{\theta_u}$ = upper = = =

This means the true unknown value of θ is in $(\hat{\theta_L}, \hat{\theta_u})$

و $\hat{\theta_L}$, $\hat{\theta_u}$ بحتمالية معينة ستكون قيمة العلمة θ واقعة بين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

* Confidence Interval (C.I) فترة الثقة

We mean by C.I., an interval $(\hat{\theta_L}, \hat{\theta_u})$ with a specified probability, the true unknown value of parameter θ lie in this interval.

نحن نعني بفترة الثقة (C.I) بانها الفترة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية المجهولة بإحتمالية محددة.

Therefore, we must specify α (probability of error)

ولهذا السبب نحن يجب ان نحدد قيمة هذه الاحتمالية وهي (α) والتي تمثل احتمالية الخطأ

$$\Rightarrow P(\hat{\theta_L} < \theta < \hat{\theta_u}) = 1-\alpha$$

This means with probability $(1-\alpha)$, the true unknown value of θ is in $(\hat{\theta_L}, \hat{\theta_u})$.

Thus to construct $(1-\alpha)100\%$ confidence interval we must specify α (i.e predetermined) محددة سابقاً

يعني لتكوين فترة ثقة بثقة $(1-\alpha)$ يجب أن نكون α محددة سابقاً.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

Confidence Interval for mean (فترات الثقة للمعدل)

سوف نتناول فترات الثقة للمعدل (θ) والتي تمثل مساحة المتوسط للتوزيع الطبيعي في حالتين

① Normal distribution $N(\theta, \sigma^2)$ (σ = known)

يعني عندما تكون σ معلومة

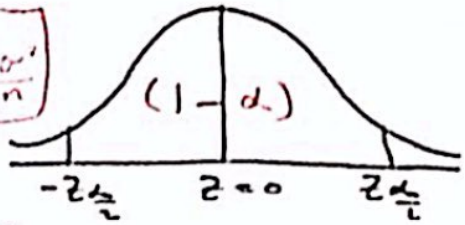
*** Construct $(1-\alpha)100\%$ C.I.**

To construct C.I. for mean of $N(\theta, \sigma^2)$, we follow as:

We know in general for specified α, C.I. is

$$P(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_u) = 1-\alpha$$

let $Z = \dfrac{\bar{X} - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ ← $E(\bar{X}) = \theta$, $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$



$$\int_{-\infty}^{-z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{\alpha}{2}$$

بالتالي

$$\Rightarrow P_r(-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P_r\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبضرب الطرفين بـ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ثم طرح $\bar{X}$ ثم الضرب بـ (-1) للمتباينة نحصل على

$$Pr\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \theta < z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$Pr\left(-\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\theta < -\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha}$$

هذا يمثل $(1-\alpha)100\%$ C.I for θ when σ = known

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

هذا يعني القيمة الحقيقية لمعلمة التوزيع الطبيعي θ عندما تكون σ معلومة تقع ضمن الفترة: $(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ باحتمالية $(1-\alpha)$

Remark

*The one-sided interval is

$$P(\theta < \bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

or $$P(\bar{x} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta) = 1-\alpha$$

* $(1-\alpha)$ is called coefficient of confidence or degree of confidence (معامل الثقة / درجة الثقة)

Ex

If a r.s. of size $(n=20)$ from a normal population with variance $\sigma^2 = 225$ has the mean $\bar{x} = 64.3$, Construct 95% C.I. for the population mean $(z_{0.025} = 1.96)$.

Solu:

a $(1-\alpha)100\%$ C.I. for mean is:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$ (from table of standard normal-dist.).

$\bar{x} = 64.3$, $n = 20$, $\sigma^2 = 225$

$\Rightarrow$ 95% C.I. for the population mean is:-

$$64.3 - 1.96\sqrt{\frac{225}{20}} < \theta < 64.3 + 1.96\sqrt{\frac{225}{20}}$$

$$\Rightarrow 57.7 < \theta < 70.9$$

هذا يعني باحتمال 95% ان القيمة الحقيقية لـ θ تقع ضمن الفترة $(57.7, 70.9)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

* Confidence Interval for mean of $N(\theta, \sigma^2)$ (σ^2 = unknown)

① For large sample size n ($n \geq 30$)

For this case $(1-\alpha)100\%$ C.I. for mean θ, is same as the above case except that σ^2 is replaced with the sample variance S^2

a $(1-\alpha)100\%$ C.I. for θ when (σ^2 = unknown) ($n \geq 30$) is:

$$\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

حيث أن S تمثل الانحراف المعياري للعينة

$$S = \sqrt{S^2} \quad \text{, where } S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

② For small sample size n ($n < 30$)

For this case, we use t-distribution. This means $(1-\alpha)100\%$ C.I. for θ is :-

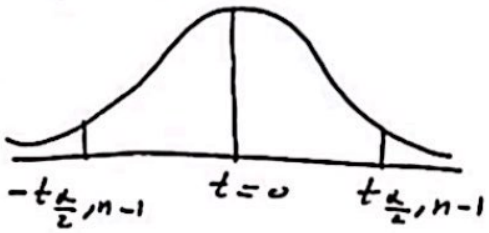
$$\bar{X} - t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

هذا القانون سنستخدم لإيجاد فترة الثقة لـ θ عندما تكون σ^2 غير معلومة ($n < 30$) حجم العينة صغير

Note توزيع t-الثنائي

Standard t-distribution

~~$t(0, 1, V)$~~ $t(0, 1, V)$ ← درجة الحرية



درجة الحرية :- هي عدد المشاهدات - عدد المعلمات المعلومة

وبما أن عدد المشاهدات = n وعدد المعلمات المعلومة هي σ^2

وبالتالي فإن

درجة الحرية (V) = $n - 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

Ex: A paint manufacturer want to determine the average drying time of a new paint. If for 12 test area of equal size he obotained a mean drying time 66.3 minutes, and a standard deviation ($S = 8.4$ minutes) Constrnct 95% C.I. for the true average drying time of the new paint

$t_{0.025,11} = 2.201$

Solu:

$\bar{X} = 66.3$ min $\quad S = 8.4$ min (S.d) $\quad , n = 12$

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow$ 95% C.I. for θ is

$$66.3 - 2.201\ \frac{8.4}{\sqrt{12}} < \theta < 66.3 + 2.201\ \frac{8.4}{\sqrt{12}}$$

$$\Rightarrow 61.0 < \theta < 71.6 \quad \underline{\text{or}} \quad (61.0, 71.6)$$

∴ باحتمال 95% ان الصبح سيجف خلال 61 ساعة الى 71.6 ساعة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner