Confidence Interval for Variance: فترة الثقة للتباين

Given $x_1, x_2, \dots, x_n$ a r.s. from $N(\theta, \sigma^2)$, if we want to construct a confidence interval for σ^2 with degree of confidence $(1-\alpha)$, we have

افرض أنه $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل بيانات عينة عشوائية مسحوبة من $N(\theta, \sigma^2)$ وافرض أننا نرغب في إيجاد فترة ثقة بعامل ثقة $(1-\alpha)$ لتباين هذا المجتمع. وهنا نقف امام حالتين:

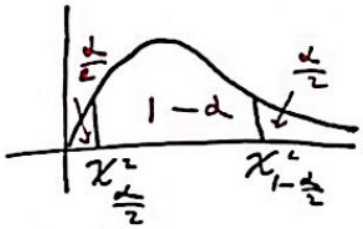
1) If θ is known اذا كان متوسط المجتمع θ معلوم

If θ known then $S^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \theta)^2$

this is the sample variance

we have the random variable

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$$



then

$$Pr\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \quad \text{----(1)}$$

where

$$\int_0^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} f(\chi^2)\,d\chi^2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P\left(\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\int_0^{1-\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} f(\chi^2)\,d\chi^2 = 1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow P\left(\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

وبالتعويض عن قيمة χ^2 في المعادلة (1) نحصل على

$$Pr\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = Pr\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وهذا يعني ان $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة χ^2 النظرية عند درجة حرية n التي تقطع احتمالاً مقدره $\frac{\alpha}{2}$ للفترة $(0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ وان $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة χ^2 النظرية عند درجة حرية n التي تقطع احتمالاً مقدره $1-\frac{\alpha}{2}$ للفترة $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

$$Pr\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبقلب النسبة نحصل على

$$\Rightarrow Pr\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} > \frac{\sigma^2}{nS^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

وبضرب المتباينة في nS^2 نحصل على

$$\Rightarrow Pr\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} > \sigma^2 > \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow Pr\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

وعليه فإن حدي الثقة هما

$$\therefore C_1 = \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} = \text{الحد الأدنى}$$

$$C_2 = \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} = \text{الحد الأعلى}$$

Ex:

If we have the random sample of size (25) from $N(10, \sigma^2)$ and the sample variance $S^2 = \frac{1}{25}\Sigma(x_i-10)^2 = 9$. Construct 95% C.I. for σ^2.

Solu

$\because 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

from table of χ^2 with (25) degree of freedom

$\chi^2_{0.025,25} = 13.1197$ and $\chi^2_{0.975,25} = 40.6465$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{(25)(9)}{40.6465} = 5.5355 \;,\; C_2 = \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{(25)(9)}{13.1197} = 17.1498$$

$$\Rightarrow Pr(5.5355 < \sigma^2 < 17.1498) = 0.95$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

2) If θ is anknown اذا كانت متوسط المجتمع θ مجهول

In this case we have $S^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2$

and $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

وبنفس طريقة اشتقاق الحالة الاولى اي

$$Pr\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow Pr\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبقلب النسب نحصل على

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

وبضرب الطرفين في $(n-1)S^2$ نحصل على

$$\Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

وعندئذ فان حدي الثقة لتباين المجتمع هما

الحد الادنى $= C_1 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$ ، الحد الاعلى $= C_2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$

Ex: Constmct $(1-\alpha)100\%$ C.I. for σ^2 if θ unknown where $1-\alpha = 0.95$, $n = 26$, $S^2 = 16$

$$\chi^2_{0.025,\,\frac{25}{n-1}} = 13.1197 \quad , \quad \chi^2_{0.975,25} = 40.6465$$

$$C_1 = \frac{(25)(16)}{40.6465} = 9.8409 \quad , \quad C_2 = \frac{(25)(16)}{13.1197} = 30.4885$$

$$\Rightarrow Pr(9.8409 < \sigma^2 < 30.4885) = 0.95$$

Scanned with CamScanner

Ex: In 16-test runs the gasoline consumption of an experiment engine has standard deviation of (2.2) gallons. Construct 99% C.I. for σ^2 (measuring the variability of the gasoline consumption of the engine).

Soln:

$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.005,15} = 4.601$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.995,15} = 32.801$

$\therefore$ 99% C.I. for σ^2 is

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{(15)(2.2)^2}{32.801} < \sigma^2 < \frac{(15)(2.2)^2}{4.601}$$

note: If we have the C.I. for σ^2 we have

$(1-\alpha)100\%$ C.I. for σ is

نقوم بأخذ الجذر التربيعي لجميع حدود المتباينة وكالاتي

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}$$

Scanned with CamScanner