3. Differential equations with linear Coefficients.

Consider the D.E.

$$(ax+by+c)dx+(\alpha x+\beta y+\gamma)\,dy=0 \quad \dots (1)$$

where $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ are constants.

we note the coefficients are linear functions w.r.t. x, y, then for this reason the D.E. (1) is called D.E. with linear Coefficients.

تحويل

we can transform D.E. (1) to the homogenous D.E. if the eqs. $ax+by+c=0$, $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ --- (2)

تمثل

have solution i.e. it is represent two lines and these lines may be intersect or be parallel.

متقاطعة

1. If the lines (2) intersect in the point (h,k), here we suppose $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ in eq (1) and the D.E. (1) become homogenous for x_1, y_1

متوازيات

2. If the lines (2) are parallel, then D.E. (1) become equation with seperation of variables.

Note

متقاطعة

1. If $m_1 \neq m_2$, then the two lines are intersect or $m_1=\frac{-1}{m_2}$

متوازيات

2. If $m_1=m_2$, then the two lines are parallel

where $m_1=-\frac{a}{b}$, $m_2=-\frac{\alpha}{\beta}$

Example (18): Solve the D.E.

$$(2x-3y+4)\,dx+(3x+2y+1)\,dy=0$$

Solution: we note $m_1=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$, $m_2=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$

i.e. $m_1 \cdot m_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{-3}{2}=-1$, this means that the two lines
متقاطعات (متعامدان)
are intersect

Now, we find the point of intersection (h,k) from the eqs.

$2x-3y+4=0$ multiply by (3)
$3x+2y+1=0$ multiply by (2)

نجد نقطة التقاطع للمستقيمين (h,k)

$\Rightarrow 4x-6y+8=0$
$9x+6y+3=0$

نحل آنياً لإيجاد قيم x, y

بالجمع

$13x+11=0 \Rightarrow x=\frac{-11}{13}$

by substituting, we find $y=\frac{10}{13}$

$\therefore$ The point of intersection $\left(\frac{-11}{13},\frac{10}{13}\right)$

Let $x=x_1-\frac{11}{13} \Rightarrow dx=dx_1$

$y=y_1+\frac{10}{13} \Rightarrow dy=dy_1$

نفرض $x=x_1+h$, $y=y_1+k$

نعوض بالمعادلة الأصلية

$$\left[2\left(x_1-\frac{11}{13}\right)-3\left(y_1+\frac{10}{13}\right)+4\right]dx_1+\left[3\left(x_1-\frac{11}{13}\right)+2\left(y_1+\frac{10}{13}\right)+1\right]dy_1=0$$

بالتبسيط نجد

$$(2x_1-3y_1)\,dx_1+(3x_1+2y_1)\,dy_1=0$$

معادلة تفاضلية متجانسة

Let $y_1 = v x_1$, $dy_1 = v\,dx_1 + x_1\,dv$

نعوض بالمعادلة المتجانسة

$$(2x_1 - 3v x_1)dx_1 + (3x_1 + 2v x_1)(v\,dx_1 + x_1\,dv) = 0$$

$$2x_1 dx_1 - \cancel{3v x_1 dx_1} + \cancel{3x_1 v\,dx_1} + 3x_1^2 dv + 2v^2 x_1 dx_1 + 2v x_1^2 dv = 0$$

$$(2x_1 + 2v^2 x_1)dx_1 + (3x_1^2 + 2v x_1^2)dv = 0$$

$$2x_1(1+v^2)dx_1 + x_1^2(3+2v)dv = 0 \qquad \text{divide by } x_1 \neq 0$$

$$2(1+v^2)dx_1 + x_1(3+2v)dv = 0$$ معادلة تفاضلية قابلة للفصل

dividing by $x_1(1+v^2)$ we find.

$$\frac{2}{x_1}dx_1 + \frac{3+2v}{1+v^2}dv = 0$$

$$2\frac{dx_1}{x_1} + \frac{3}{1+v^2}dv + \frac{2v}{1+v^2}dv = 0$$

نكامل

$$2\ln|x_1| + 3\tan^{-1}v + \ln|1+v^2| = \ln c$$

نرجع $v = \dfrac{y_1}{x_1}$

$$2\ln|x_1| + 3\tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} + \ln\left|1 + \frac{y_1^2}{x_1^2}\right| = \ln c$$

نرجع $y_1 = y - \dfrac{10}{13}$, $x_1 = x + \dfrac{11}{13}$

$$2\ln\left|x + \frac{11}{13}\right| + 3\tan^{-1}\frac{y - 10/13}{x + 11/13} + \ln\left|1 + \frac{(y + \frac{10}{13})^2}{(x + \frac{11}{13})^2}\right| = \ln c$$

نلاحظ ان المعادلة الاخيرة بدلالة x و y.

Example (19): Solve the D.E.

$$(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$$

<u>Solution:</u> we note $m_1 = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$, $m_2 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

i.e. $m_1 \neq m_2$, this means that the two lines are intersect

Now, we find the point of intersection (h, k) from the .

eqs. $2x - 5y + 3 = 0$

$$\begin{array}{r} 2x + 4y - 6 = 0 \\ \hline -9y + 9 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$ بالطرح

حل آنياً

$x = 1$ بالتعويض نجد

$\therefore$ The point of intersection $(1, 1)$

let $x = x_1 + 1 \Rightarrow dx = dx_1$

$y = y_1 + 1 \Rightarrow dy = dy_1$

نعوض بالمعادلة الاصلية

$$[2(x_1+1) - 5(y_1+1) + 3]dx_1 - [2(x_1+1) + 4(y_1+1) - 6]dy_1 = 0$$

بالتبسيط نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية

$$(2x_1 - 5y_1)dx_1 - (2x_1 + 4y_1)dy_1 = 0$$

let $y_1 = vx_1$, $dy_1 = v\,dx_1 + x_1\,dv$ نعوض بالمعادلة الآتية

$$(2x_1 - 5vx_1)dx_1 - (2x_1 + 4vx_1)(v\,dx_1 + x_1\,dv) = 0$$

$$2x_1dx_1 - 5vx_1dx_1 - 2x_1v\,dx_1 - 2x_1^2dv - 4v^2x_1dx_1 - 4vx_1^2dv = 0$$

$$(2x_1 - 7vx_1 - 4v^2x_1)dx_1 - (2x_1^2 + 4vx_1^2)dv = 0$$

$$x_1(2 - 7v - 4v^2)dx_1 - x_1^2(2 + 4v)\,dv = 0 \qquad \div x_1$$

$$(2 - 7v - 4v^2)dx_1 - x_1(2 + 4v)\,dv = 0$$

معادلة قابلة للفصل

$$\frac{dx_1}{x_1} - \frac{2+4v}{2-7v-4v^2}\,dv = 0$$

بتحليل المقام نحصل على

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} + \frac{4du}{3(4u-1)} + \frac{2du}{3(2+u)} = 0$$

نكامل

$$\ln|x_1| + \frac{1}{3}\ln|4u-1| + \frac{2}{3}\ln|2+u| = \ln c$$

نعوض عن $u = \frac{y_1}{x_1}$

$$\ln|x_1| + \frac{1}{3}\ln\left|4\frac{y_1}{x_1} - 1\right| + \frac{2}{3}\ln\left|2+\frac{y_1}{x_1}\right| = \ln c$$

نرجع $y_1 = y-1$, $x_1 = x-1$ فنحصل على الحل للمعادلة بدلالة x و y

$$\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{4(y-1)}{x-1} - 1\right| + \frac{2}{3}\ln\left|2+\frac{y-1}{x-1}\right| = \ln c$$

ملاحظة: طريقة الحل عندما يكون المستقيمان متقاطعان

١. اجد نقطة التقاطع ولتكن (h,k)

2. نفرض ان

$$x = x_1 + h \Rightarrow dx = dx_1$$
$$y = y_1 + k \qquad dy = dy_1$$

3. نعوض عن x , y , dx , dy في المعادلة التفاضلية وبعد تبسيطها نحصل على معادلة تفاضلية متجانسة بمتغيرين x_1 , y_1 ثم اجد الحل العام لها

4. نعوض عن $y_1 = y-k$, $x_1 = x-h$ في الحل العام الناتج من الخطوة (3) سيكون هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الاصلية في المتغيرين x و y

Example(20): Solve the D.E.

$$(2x-3y-1)\,dx + 6(2x-3y-1)\,dy = 0$$

Solution: $m_1 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$, $m_2 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

we note $m_1 = m_2$, so the two lines are parallel متوازيات