$$\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} + \frac{4dv}{3(4v-1)} + \frac{2dv}{3(2+v)} = 0$$

نكامل

$$\ln|x_1| + \frac{1}{3}\ln|4v-1| + \frac{2}{3}\ln|2+v| = \ln c$$

نعوض عن $v = \frac{y_1}{x_1}$

$$\ln|x_1| + \frac{1}{3}\ln\left|4\frac{y_1}{x_1} - 1\right| + \frac{2}{3}\ln\left|2+\frac{y_1}{x_1}\right| = \ln c$$

نرجع $x_1 = x-1$ ، $y_1 = y-1$ فنحصل على الحل العام بدلالة x, y

$$\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{4(y-1)}{x-1} - 1\right| + \frac{2}{3}\ln\left|2+\frac{y-1}{x-1}\right| = \ln c$$

ملاحظة: طريقة الحل عندما يكون المستقيمان متقاطعان

1. اجد نقطة التقاطع ولتكن (h,k)
2. نفرض ان

$$x = x_1 + h \Rightarrow dx = dx_1$$
$$y = y_1 + k \quad dy = dy_1$$

3. نعوض عن x, y ، dy, dx في المعادلة التفاضلية وبعد تبسيطها نحصل على معادلة تفاضلية متجانسة بمتغيرين x_1, y_1 ثم اجد الحل العام لها
4. نعوض عن $y_1 = y-K$ ، $x_1 = x-h$ في الحل العام الناتج من الخطوة (3) فنكون حصلنا على الحل العام للمعادلة التفاضلية الاصلية في المتغيرين x, y

Example(20): Solve the D.E.

$$(2x-3y-1)dx + 6(2x-3y-1)dy = 0$$

Solution: $m_1 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ ، $m_2 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

we note $m_1 = m_2$, so the two lines are parallel متوازيان

Let $z = 2x - 3y \Rightarrow -3y = z - 2x$

$$\Rightarrow y = \frac{z-2x}{-3}$$

$$\therefore y = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3}x \;,\; dy = \frac{dz}{-3} + \frac{2}{3}dx$$

نعوض بالمعادلة الأصلية، أي

$$(z-1)dx + 6(z-1)\left(\frac{dz}{-3} + \frac{2}{3}dx\right) = 0$$

نبسط $(z-1)dx - (2)z\,dz + 4z\,dx + 2dz - 4dx = 0$

$$(z - 1 + 4z - 4)dx + (-2z + 2)dz = 0$$

$$(5z - 5)dx + (-2z + 2)dz = 0$$

معادلة تفاضلية قابلة للفصل $5(z-1)\,dx - 2(z-1)\,dz = 0$ ÷ $(z-1)$

$$5dx - 2\,dz = 0$$

نكامل

$$5x - 2z = C$$

نرجع $z = 2x - 3y$

$$5x - 2(2x - 3y) = C$$

نبسط ونجد الحل العام

$$x + 6y = C$$

Example (21): Solve the D.E.

$$(x+y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$$

Solution: $m_1 = -1$, $m_2 = -\frac{3}{3} = -1$, $m_1 = m_2$, so the two lines are parallel.

Let $z = x + y \Rightarrow dy = dz - dx$

نعوض بالمعادلة

$$z\,dx + (3z - 4)(dz - dx) = 0$$

بالتبسيط نحصل على

$$2dx + 3zdz - 3zdx - 4dz + 4dx = 0$$

$$2(2-z)dx + (3z-4)dz = 0$$

صارت تفاضلية قابلة للفصل بالقسمة على $2-z$

$$2dx + \frac{3z-4}{2-z}dz = 0$$

بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r|l} & -3 \\ \hline 2-z & 3z-4 \\ & \mp 3z \pm 6 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$2dx - 3dz + \frac{2}{2-z}dz = 0$$

نكامل

$$2x - 3z - 2\ln|2-z| = c$$

نعوض عن $z = x+y$ فنحصل على

$$2x - 3(x+y) + 2\ln|2-(x+y)| = c$$

الحل العام للمعادلة

ملاحظة: خطوات الحل إذا كان المشتق متوازيان

1. نفرض $z = ax+by$ إذن $dz = adx+bdy$ ، $dy = \frac{dz-adx}{b}$
2. نعوض عن z, dy بالمعادلة فتتحول إلى معادلة تفاضلية قابلة للفصل، نوحد كل المعاملات بدلالة x و z.
3. نرجع ونعوض عن z بما يساويه فنحصل على الحل العام بدلالة x و y

Exercises

1. Find the general solution for the following D.E.

1. $(2x+y)dy = (x+2y)dx$
2. $(4x+2y+3)dx - (6x+3y-2)dy = 0$
3. $[2(2x+y)+3]dx - [3(2x+y)-2]dy = 0$

2- Find the particular solution for the following

1. $(x+2y+7)dx + (y-2x-9)dy = 0$, $y(0) = 1$

2. $(x+2y)dx + (2x-3y)dy = 0$, $y(1) = 1$

4. Exact Differential equations

Definition (10): A Total differential of the function $f(x,y)$ is given by the form

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad \text{....} (1)$$

R.H.S of eq (1) called Total differential, if R.H.S equal zero i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad \text{...} (2)$$

then eq. (2) called exact D. E. and it's solution are $f(x,y) = c$, where c arbitrary constant.

Theorem (1): If $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ in the D.E.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, are Continuous functions of x and y, then the necessary and sufficient condition that the D.E. be an exact that

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Example (22): ① The D.E. $3x(xy-2)dx + (x^2+2y)dy = 0$ is exact D.E., Since $M(x,y) = 3x(xy-2)$, $N(x,y) = x^2+2y$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

② The D.E. $(4xy+3y^2-x)dx + x(x+2y)dy = 0$ is not exact D.E., Since $M(x,y) = 4xy+3y^2-x$, $N(x,y) = x(x+2y)$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x+6y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x+2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

Note: to solve these equations, we note if the D.E. exact, then there exist function $f(x,y)$ such that

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

or

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x)$$

Example (23): Solve the D.E.

$$(2x+3x^2y)dx + (x^3+3y^2)dy = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Solution:

$$M(x,y) = 2x+3x^2y, \quad N(x,y) = x^3+3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

نختبر المعادلة

So, we note $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ D.E. exact

$\therefore$ $\exists$ Function $f(x,y)$ such that

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y)$$

$$= \int (2x + 3x^2y)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^2 + x^3y + \phi(y) \quad \text{--- (2)}$$

نشتق المعادلة (2) بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \phi'(y)$$

تعريف

from the definition of total differential, we note

$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, then

$$x^3 + \phi'(y) = x^3 + 3y^2 \Rightarrow \phi'(y) = 3y^2 \xrightarrow{\text{نكامل}} \phi(y) = y^3 + c$$

نعوض بالمعادلة (2) فنحصل على الحل.

$$f(x,y) = x^2 + x^3y + y^3 + c.$$

طريقة ثانية: لو استخدمنا التكامل الثاني للحل اي:

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x)$$

$$f(x,y) = \int (x^3 + 3y^2)\,dy + g(x)$$

$$f(x,y) = x^3y + y^3 + g(x) \quad \text{--- (3)}$$

نشتق المعادلة (3) بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + g(x)$$

بما ان $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ فان

$$3x^2y + g'(x) = 2x + 3x^2y$$

$$g'(x) = 2x \xrightarrow{\text{نكامل}} g(x) = x^2 + c$$

نعوض في المعادلة (3)