5. Linear Differential equations

The general form of the D.E. of first order is

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \text{--- (1)}$$

or

$$\frac{dx}{dy} = g(y)x = h(y) \quad \text{.... (2)}$$

To solve eqs. (1), (2), we find the integral factor (عامل التكامل) as

$u = e^{\int P(x)dx}$, $u = e^{\int g(y)dy}$, respectively multipling (1) or (2) by integral factor, we get equation can be solve

Example (30) solve the D.E.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2 \quad , \quad y(2) = 3$$

solution: we note $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$

$$\therefore \quad u = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب الطرفين لتفاضلية بعامل التكامل

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3 \Rightarrow x\,dy + y\,dx = x^3\,dx$$

$$\Rightarrow d(xy) = x^3\,dx \xrightarrow{\text{تكامل}} xy = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^3 + Cx^{-1} \text{ is the general solution of D.E.}$$

To find the particular solution (الحل الخاص) for D.E. we use $y(2) = 3$

$3 = \frac{1}{4}(2)^3 + \frac{c}{2} \Rightarrow 3 = 2 + \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$

نعوض بالحل العام

$\therefore y(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{x}$ is the particular sol.

Example (31): solve the D.E. $dy + 2xy\,dx = xe^{-x^2}dx$

Solution:

بالقسمة على dx نجد

$\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$ ...(1) is linear D.E.

$p(x) = 2x$, $Q(x) = xe^{-x^2}$

نجد عامل التكامل

$u = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

نضرب المعادلة (1) بعامل التكامل ونختصر

$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xye^{x^2} = x \Rightarrow e^{x^2}dy + 2xye^{x^2}dx = x\,dx$

$d(ye^{x^2}) = x\,dx \xrightarrow{\text{نكامل}} ye^{x^2} = \frac{x^2}{2} + c$

$\therefore y(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + ce^{-x^2}$ is the general solution of D.E.

Example (32): solve the D.E.

$$y\frac{dx}{dy} + 2x = y^3$$

Solution:

بالقسمة على y بشرط $y \neq 0$ نجد

$\frac{dx}{dy} + 2\frac{x}{y} = y^2$ ...(1) linear D.E.

$u = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$

نضرب المعادلة (1) بعامل التكامل

$$y^2\frac{dx}{dy} + 2xy = y^4 \Rightarrow y^2dx + 2xy\,dy = y^4dy$$

$$\Rightarrow d(xy^2) = y^4dy \xrightarrow{\text{تكامل}} xy^2 = \frac{y^5}{5} + c$$

$$\therefore x(y) = \frac{y^3}{5} + cy^{-2} \text{ is the general solution of D.E.}$$

Example (33): solve the D.E.

$$\frac{dx}{dy} + 3\frac{x}{y} = 2y \quad , \; y \neq 0 \quad \cdots (1)$$

solution: $g(y) = \frac{3}{y}$

$$\therefore u = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$$

نضرب المعادلة (1) بعامل التكامل

$$y^3dx + 3xy^2dy = 2y^4dy \Rightarrow d(y^3x) = 2y^4dy$$

$$\xrightarrow{\text{تكامل}} y^3x = \frac{2}{5}y^5 + c$$

$$\therefore x(y) = \frac{2}{5}y^2 + cy^{-3} \text{ the general solution of D.E.}$$

Example (34): solve the D.E.

$$x^2dy - \sin 2x\,dx + 3xy\,dx = 0$$

solution: بالقسمة على dx للحصول على الصيغة القياسية للمعادلة

$$x^2\frac{dy}{dx} - \sin 2x + 3xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 3\frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x^2} \quad \text{is linear D.E.} \quad \div x^2$$

$$\cdots (1)$$

$$p(x) = \frac{3}{x}$$

$$u = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

نضرب المعادلة (1) بعامل التكامل

$$x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x\sin 2x$$

$$\Rightarrow x^3dy + 3x^2y\,dx = x\sin 2x\,dx$$

$$\Rightarrow d(x^3y) = x\sin 2x\,dx \xrightarrow{\text{تكامل}} x^3y = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\therefore y(x) = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{\sin 2x}{x^2} + cx^{-3}$$ the general solution

ملاحظة: خطوات حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

1. ترتيب المعادلة بالصيغة العامة وعامل $\frac{1}{=}$ لـ $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dx}{dy}$
2. إيجاد عامل التكامل بأحدى العلاقتين $u = e^{\int p(x)dx}$, $u = e^{\int g(y)dy}$
3. ضرب المعادلة التفاضلية بعامل التكامل
4. تكامل الطرفين والحصول على الحل العام.

- Bernoulli Equation معادلة برنولي

The general form of Bernoulli equation is

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \quad , n \neq 1 \quad \cdots (1)$$

where p, Q are functions of x only

or $$\frac{dx}{dy} + g(y)x = h(y)x^n \quad , n \neq 1$$

where g, h are functions of y only.

In order to transform equation (1) to linear form, multiplying equation (1) by y^{n-1}, then become:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x) \quad \ldots\ldots (2)$$

suppose $z = y^{1-n}$, $\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$

substituting in (2)

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx} + P(x)\,z = Q(x)$$

which is linear D.E. for z, and we can solve it by the same method.

Example (35): Solve the D.E.

$$\frac{dy}{dx} - xy = -y^3 e^{-x^2}$$

Solution:

بضرب الطرفين بـ y^{-3} :

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - xy^{-2} = -e^{-x^2} \quad \ldots (1)$$

suppose $z = y^{-2}$, $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

نفوض في المعادلة (1)

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - xz = -e^{-x^2}$$

نضرب المعادلة بـ (-2) كمعامل

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2} \quad -(2)$$

, Linear D.E. with respect to x.

$$u = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

نضرب المعادلة (2) بعامل التكامل

$$e^{x^2}\frac{dz}{dx} + 2xze^{x^2} = 2 \Rightarrow e^{x^2}dz + 2xze^{x^2}dx = 2dx$$

$$d(ze^{x^2}) = 2dx \xrightarrow{\text{تكامل}} ze^{x^2} = 2x + c$$

نعوض عنه $z = y^{-2}$ ونبسط فنحصل على

$$y^{-2} = 2xe^{-x^2} + ce^{-x^2}$$ is the general sol.

Example (36): Solve the D. E.

$$dx - 2xy\,dy = 6x^3y^2e^{-2y^2}dy$$

solution:

بالقسمة على dy

$$\frac{dx}{dy} - 2xy = 6x^3y^2e^{-2y^2}$$

معادلة برنولي من النوع الثاني

نضرب الطرفين بـ x^{-3}

$$x^{-3}\frac{dx}{dy} - 2x^{-2}y = 6y^2e^{-2y^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

suppose $z = x^{-2}$, $\frac{dz}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{1}{-2}\frac{dz}{dy} = x^{-3}\frac{dx}{dy}$

نعوض بالمعادلة (1)

$$\frac{-1}{2}\frac{dz}{dy} - 2yz = 6y^2e^{-2y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} + 4yz = -12y^2e^{-2y^2} \quad \ldots(2)$$ is linear D.E. with respect to y.

$$u = e^{\int 4y\,dy} = e^{2y^2}$$

نضرب المعادلة (2) بعامل التكامل

$$e^{2y^2}\frac{dz}{dy} + 4yze^{2y^2} = -12y^2$$

$$e^{2y^2}dz + 4yze^{2y^2}dy = -12y^2dy$$

$$d(ze^{2y^2}) = -12y^2dy \xrightarrow{\text{تكامل}} ze^{2y^2} = -4y^3 + c$$

$$\therefore z = -4y^3e^{-2y^2} + ce^{-2y^2}$$

نرجع $z = x^{-2}$ نحصل على

$$x^{-2} = -4y^3e^{-2y^2} + ce^{-2y^2}$$ is the general solution of D.E.

ملاحظة: لتحويل معادلة برنولي إلى معادلة تفاضلية خطية

1. نفرض $z = y^{1-n}$, $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$
2. التعويض عنه z , $\frac{dy}{dx}$ في المعادلة التفاضلية نحصل على

$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

3. حل المعادلة التفاضلية الخطية ، ونرجع z إلى الأصلي.

Exercises: 1. Find the general solution for the following D.E.

1. $dy + 2xy\,dx = xe^{-x^2}dx$
2. $dy + \frac{3}{x}y\,dx = x^{-3}e^{x}\,dx$
3. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2 + 2$, $x \neq 0$
4. $\frac{dx}{dy} + 2\frac{x}{y} = 2y$, $y \neq 0$
5. $dx - (1 + 2x + \tan y)dy = 0$
6. $dx + \frac{2x}{y}dy = 2x^2y^2dy$