Example (58): solve $y''' + y'' - 2y = 6x^2 - 5\cos 2x$

Solution: the characteristic eq. of the D.E. is

$$k^3 + k^2 - 2 = 0$$

$$(k^2 + 2k + 2)(k - 1) = 0$$

$$k = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \mp \sqrt{-4}}{2}$$ باستخدام القانون

$k_1 = -1 + i$, $k_2 = -1 - i$ جذور معقدة , $k_3 = 1$ جذر حقيقي

$$\therefore y_c(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 e^{x}$$

نستخدم طريقة القسمة فنجد

$$\begin{array}{r|l} k-1 & k^2 + 2k + 2 \\ \hline & k^3 + k^2 - 2 \\ \text{بالطرح} & \mp k^3 \pm k^2 \\ \hline & 2k^2 - 2 \\ \text{بالطرح} & \mp 2k^2 \pm 2k \\ \hline & 2k - 2 \\ \text{بالطرح} & \mp 2k \pm 2 \\ \hline & \end{array}$$

لإيجاد الحل الخاص نلاحظ لدينا حالتين في الطرف الأيمن (دالة متعددة الحدود من الدرجة 2 , دالة مقدرة) لهذا نفرض الحالتين

we suppose

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x$$

$$y_p'(x) = 2Ax + B - 2D\sin 2x + 2E\cos 2x$$

$$y_p''(x) = 2A - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x$$

$$y_p'''(x) = 8D\sin 2x - 8E\cos 2x$$

نعوض بالمعادلة الأصلية فنجد

$$8D\sin 2x - 8E\cos 2x + 2A - 4\cos 2x - 4E\sin 2x$$
$$-2(Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x) = 6x^2 - 5\cos 2x$$

بالتبسيط نجد

$$(8D-6E)\sin 2x+(-8E-6D)\cos 2x-2Ax^2-2Bx+(2A-2C)=6x^2-5\cos 2x$$

نقارن

$$-2A=6\Rightarrow A=-3$$

$$-2B=0\Rightarrow B=0$$

$$2A-2C=0\Rightarrow 2(-3)-2C=0\Rightarrow C=-3$$

$$-6D-8E=-5$$

$$8D-6E=0$$

نحل المعادلتين آنياً بضرب الاول بـ (8) والثانية بـ (6) نطرح

$$-48D-64E=-40$$

$$48D-36E=0$$

بالجمع

$$-100E=-40\Rightarrow E=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

نعوض باحد المعادلتين نجد $D=\frac{3}{10}$ وعليه يكون الحل الخاص

$$y_p(x)=-3x^2-3+\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{2}{5}\sin 2x$$

الحل العام

$$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$$

$$\therefore y(x)=e^{-x}[C_1\cos x+C_2\sin x]+C_3e^{x}-3x^2-3+\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{2}{5}\sin 2x$$

Example(59): Solve the D.E. $y'''+y''-2y=x^2.e^{2x}$

Solution: the characteristic eq. of the D.E. is

$$k^3+k^2-2=0$$

$$\Rightarrow (k^2+2k+2)(k-1)=0$$

من المثال السابقة

$$\therefore k_1=-1+i,\ k_2=-1-i,\ k_3=1$$

$$\therefore y_c(x) = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + c_3 e^{x}$$

لايجاد الحل الخاص نلاحظ ان الطرف الايمن (ضرب دالة اسية و دالة متعددة الحدود) لذلك نثبت احدى الدالتين ونأخذ الفرضية للدالة الاخرى.

we suppose

$$y_p(x) = x^2(Ae^{2x})$$

$$y'_p(x) = x^2(2Ae^{2x}) + 2xAe^{2x}$$

$$y''_p(x) = x^2(4Ae^{2x}) + 2x(2Ae^{2x}) + 2Ae^{2x} + 2x(2Ae^{2x})$$

$$= 4Ax^2e^{2x} + 4Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

$$= 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}$$

$$y'''_p(x) = x^2(8Ae^{2x}) + 2x(4Ae^{2x}) + x(16Ae^{2x}) + 8Ae^{2x} + 4Ae^{2x}$$

$$= 8Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 16Axe^{2x} + 12Ae^{2x}$$

$$= 8Ax^2e^{2x} + 24Axe^{2x} + 12Ae^{2x}$$

نعوض بالمعادلة الاصلية

$$8Ax^2e^{2x} + 24Axe^{2x} + 12Ae^{2x} + 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}$$

$$-2x^2Ae^{2x} = x^2e^{2x}$$

$$10Ax^2e^{2x} + 32Axe^{2x} + 14Ae^{2x} = x^2e^{2x}$$

نقارن

$$10A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{10}$$

$$\therefore y_p(x) = \frac{1}{10}x^2e^{2x}$$

$$\therefore y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

$$= e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + c_3e^{x} + \frac{1}{10}x^2e^{2x}$$

Example (60): solve $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$

Solution: the characteristic eq. of the D.E is

$k^2 - 2k + 5 = 0$, باستخدام القانون

$k = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(5)}}{2} \Rightarrow k_1 = 1 - 2i \ , \ k_2 = 1 + 2i$

جذور معقدة (مرافقة)

$\therefore y_c(x) = e^x [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$

لإيجاد الحل الخاص نلاحظ ان الطرف الايمن حاصل ضرب دالتين (متعددة, اسية) لذلك نشتق احدى الدالتين ونأخذ المرافقة للدالة الاخرى

we suppose

$y_p(x) = e^x (A \cos x + B \sin x)$ تكون $a = 1$ في $\sin x$ ليس الجذر الخيالي لاحد الجذور

$y_p'(x) = e^x (-A \sin x + B \cos x) + e^x (A \cos x + B \sin x)$

$y_p''(x) = e^x (-A \cos x - B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x)$

$+ e^x (-A \sin x + B \cos x) + e^x (A \cos x + B \sin x)$

$= -2A e^x \sin x + 2B \cos x e^x$

بالتعويض في المعادلة الاصلية

$-2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x - 2(-Ae^x \sin x + Be^x \cos x + Ae^x \cos x$

$+ Be^x \sin x) + 5(Ae^x \cos x + Be^x \sin x) = e^x \sin x$

نبسط

$3Ae^x \cos x + 3Be^x \sin x = e^x \sin x$

نقارن

$3A = 0 \Rightarrow A = 0$

$3B = 1 \Rightarrow B = 1/3$

$\therefore y_p(x) = \frac{1}{3} e^x \sin x$

$\therefore y(x) = y_c(x) + y_p(x) = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{3} e^x \sin x$

ملاحظة: حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بطريقة المعاملات غير المعينة

1. نجد الحل المتمم y_c وذلك لحل المعادلة التفاضلية بعد جعل $h(x)$ مساوي للصفر واستخدام المعادلة المميزة ثم ايجاد الجذور للمعادلة وكتابة الحل بالاعتماد على نوعية الجذور

2. نجد الحل الخاص $y_p(x)$ وذلك بوضع فرضية لـ $y_p(x)$ بالاعتماد على نوع الدالة $h(x)$ والتي تكون على ثلاثة أنواع (مقدار ثابت، أسية، مثلثية)

3. نعوض بفرضية y_p ومشتقاتها في المعادلة الأصلية ونجد قيم الثوابت ثم نعوضها في y_p ونأخذ $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ الحل العام

ملاحظة: (1) إذا كان الطرف الأيمن يتكون من نوعين من الدوال السابقة الذكر وكان بينهما إشارة (+) أو (−) فيفرض الحل الخاص y_p كحدين، الحد الأول للنوع الأول والحد الثاني للنوع الثاني

(2) إذا كانت الإشارة بين الدالتين (·) أو (÷) فتتبع أحدى الدالتين ونأخذ الفرضية للأخرى

(3) إذا كانت $h(x)$ دالة زائدية نقول أنها دالة أسية ثم نأخذ الفرضية لها.

Exercises

solve the following D.Es.

1. $y'' + 4y + 4y = x^2$

2. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

3. $y''+4y'+4y = e^{2x}$

4. $y''+4y'+4y = e^{2x}\sin x$

5. $y''+4y'+4y = \cosh x$

Use $\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{x}+e^{-x}\right]$

6. $y''-y = \sin x$

7. $y'''-y''-4y'-4y = 4x^2+12x-6$

8. $y''+4y'+5y = 10$

9. $y''+4y'+4y = 2\cos^2 x$

Use $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

10. $4y''-8y'+5y = e^{x}+x$

11. $y''+y = -2\sin x + 4x\cos x$.

3. Variation of Parameters method (طريقة تغيير الثوابت (لاجرانج))

It is general method to find particular solution of non-homogenous D.E., In this method, we change arbitrary constant c_i in general solution $\sum c_i y_i$ on the homogenous D.E. by functions v_i such that $\sum v_i y_i$ become particular solution, i.e. $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ become

$y = v_1y_1 + v_2y_2 + \dots + v_ny_n$ become particular solution of nonhomogenous D.E.

Consider the D.E. of second order of form:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = h(x) \quad -- \quad (A)$$

and let eq. (A) has complete solution $y_c(x)$ of the form

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

we try to find functions $v_1(x), v_2(x)$ such that

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 \text{ is the particular solution of (A)}$$

for this purpose we use eqs. of form

(الشرط الاول) $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad --- \quad (1)$

(الشرط الثاني) $v_1' y_1' + v_2' y_2' = h(x) \quad --- \quad (2)$

Solving (1), (2) by using Grammer method

$$v_1' = \frac{-y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} h(x) \quad , v_2' = \frac{y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} h(x)$$

i.e.

$$v_1' = \frac{-y_2}{w(y_1, y_2)} h(x) \quad , v_2' = \frac{y_1}{w(y_1, y_2)} h(x)$$

by integrating both side, we find v_1, v_2 and finding the particular solution.