Methods for Solving linear D.E. with Constant Coefficients

1. Operator method طريقة المؤثر
2. Undetermind coefficients طريقة المعاملات غير المعينة
3. Variation of parameters طريقة تغيير الثوابت (البارامترات)

1. Operator method

In this method, we use the operator (المؤثر) D, where

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \cdots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

For example

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad (aD+b)y = a\frac{dy}{dx} + by, \quad D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots, \text{etc.}$$

If we have non homogenous Linear D.E. of the form

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = f(x)$$

then we can write it by the operator D as follows:

$$(D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \cdots + a_n)y = f(x)$$

or $f(D)y = f(x)$

where $f(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n$

Example (45): Find the following

1. De^{3x}

Solution: $De^{3x} = 3e^{3x}$

2. $(4D^2-5)\sin x$

Solution: $(4D^2-5)\sin x = 4D^2\sin x - 5\sin x$

$= -4\sin x - 5\sin x = -9\sin x$

3. $(D^4+D^2+1)\cos 3x$

Solution: $(D^4+D^2+1)\cos 3x = D^4\cos 3x + D^2\cos 3x + \cos 3x$

$= 81\cos 3x - 9\cos 3x + \cos 3x$

4. $(D^3+5D-4)e^{2x}$ $= 73\cos 3x$

Solution: $(D^3+5D-4)e^{2x} = D^3e^{2x} + 5De^{2x} - 4e^{2x}$

$= 8e^{2x} + 10e^{2x} - 4e^{2x}$

$= 14e^{2x}$

Solving D.E. by operator method

we can solving D.E. with constant coefficients by using operator method as in the following exapks:

Example (46): Solve the D.E. $y'' - 2y' - 3y = 5e^{-2x}$

Solution: we can rewrite D.E. by operator form as:

$$(D^2-2D-3)y = 5e^{-2x}$$

$$(D+1)(D-3)y = 5e^{-2x} \quad \text{---- } ①$$

Let $u_1 = (D-3)y$

نعوض في ①

$$(D+1)u_1 = 5e^{-2x}$$

then this D.E. can be write as:

$$\frac{du_1}{dx} + u_1 = 5e^{-2x}$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى

$$u = e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^{x}$$

نضرب المعادلة الخطية بعامل التكامل

$$e^{x}\frac{du_1}{dx} + u_1 e^{x} = 5e^{-x}$$

$$e^{x}du_1 + u_1 e^{x}dx = 5e^{-x}dx \Rightarrow d(u_1 e^{x}) = 5e^{-x}dx$$

نكامل

$$u_1 e^{x} = -5e^{-x} + c \Rightarrow u_1 = -5e^{-2x} + ce^{-x}$$

نعوض عن قيمة u_1

$$(D-3)y = -5e^{-2x} + ce^{-x}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{dy}{dx} - 3y = -5e^{-2x} + ce^{-x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاول

$$u = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$$

نضرب المعادلة الخطية بعامل التكامل

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3ye^{-3x} = -5e^{-5x} + ce^{-4x}$$

$$e^{-3x}dy - 3ye^{-3x}dx = (-5e^{-5x} + ce^{-4x})dx$$

$$d(ye^{-3x}) = (-5e^{-5x} + ce^{-4x})dx$$

نكامل

$$ye^{-3x} = e^{-5x} + \frac{c}{-4}e^{-4x} + c_1$$

$$y(x) = e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_1 e^{3x}, \quad c_2 = \frac{c}{-4}$$

Example (47): Solve the D.E. $y'' - 3y' + 2y = 0$

Solution: we can write D.E. by operator form

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \quad , D = \frac{d}{dx}$$

$$(D-1)(D-2) = 0 \quad \cdots ①$$

Let $u_1 = (D-2)y$ نعوض في ①

$$(D-1)u_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du_1}{dx} - u_1 = 0 \quad \cdots ②$$ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى

عامل التكامل $u = e^{\int -dx} = e^{-x}$ نضرب عامل التكامل

$$e^{-x}\frac{du_1}{dx} - u_1 e^{-x} = 0$$

$$e^{-x}du_1 - u_1 e^{-x}dx = 0 \Rightarrow d(u_1 e^{-x}) = 0$$ تكامل

$$u_1 e^{-x} = c \Rightarrow u_1 = ce^{x}$$

$$(D-2)y = ce^{x}$$ نعوض عن u_1

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - 2y = ce^{x} \quad \cdots ③$$ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاول

$$u = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

نضرب المعادلة ③ بعامل التكامل

$$e^{-2x}\frac{dy}{dx} - 2ye^{-2x} = ce^{-x}$$

$$e^{-2x}dy - 2ye^{-2x}dx = ce^{-x} \Rightarrow d(e^{-2x}y) = ce^{-x}$$ بالتكامل

$$e^{-2x}y = -ce^{-x} + c_1 \quad \therefore y(x) = -ce^{x} + c_1 e^{2x}$$

Example (48): solve $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$

Solution: we can write D.E. by operator form

$$(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$$

$$(D-2)(D^2 + 4D + 3)y = 0$$

$$(D-2)(D+1)(D+3)y = 0 \quad \cdots (1)$$

Let $u_1 = (D+1)(D+3)y$

نعوض في (1)

$$(D-2)u_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du_1}{dx} - 2u_1 = 0$$

معادلة خطية من الرتبة الاول

عامل التكامل $u = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

باستخدام القسمة المطولة (طريقة الحشر)

فان المسألة

$$\begin{array}{r|l} D^3 + 2D^2 - 5D - 6 & D^2 + 4D + 3 \\ \hline \mp D^3 \pm 2D^2 & D - 2 \\ \hline 4D^2 - 5D & \\ \mp 4D^2 \pm 8D & \text{بالطرح} \\ \hline 3D - 6 & \\ \mp 3D \pm 6 & \text{بالطرح} \\ \hline 0 & \end{array}$$

نضرب المعادلة الخطية بعامل التكامل

$$e^{-2x}\frac{du_1}{dx} - 2u_1 e^{-2x} = 0$$

$$e^{-2x}du_1 - 2u_1 e^{-2x}dx = 0 \Rightarrow d(u_1 e^{-2x}) = 0$$

تكامل

$$u_1 e^{-2x} = c \Rightarrow u_1 = ce^{2x}$$

نعوض عن قيمة u_1 فتجد

$$(D+1)(D+3)y = ce^{2x} \quad \cdots (2)$$

Let $u_2 = (D+3)y$

نعوض في (2)

$$(D+1)u_2 = ce^{2x}$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاول

$$\Rightarrow \frac{du_2}{dx} + u_2 = ce^{2x}$$

عامل التكامل $u = e^{\int dx} = e^{x}$

نضرب المعادلة بعامل التكامل

$$e^{x}\frac{du_2}{dx} + u_2 e^{x} = ce^{3x} \Rightarrow d(u_2 e^{x}) = ce^{3x}$$

نكامل

$$u_2 e^{x} = \frac{c}{3}e^{3x} + c_1$$

$$\therefore u_2 = \frac{c}{3}e^{2x} + c_1 e^{-x} \quad \text{or} \quad u_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \; c_1 = \frac{c}{3}$$

نعوض عن u_2

$$(D+3)y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 3y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأول

$$u = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

نضرب المعادلة الخطية بعامل التكامل

$$e^{3x}dy + 3ye^{3x}dx = (c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x})dx$$

$$d(ye^{3x}) = (c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x})dx$$

نكامل

$$ye^{3x} = \frac{c_1}{2}e^{2x} + \frac{c_2}{5}e^{5x} + c_3$$

$$\therefore y(x) = c_3 e^{-3x} + c_4 e^{-x} + c_5 e^{2x}, \; c_3 = \frac{c_1}{2}, \; c_4 = \frac{c_2}{5}$$

ملاحظة: حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n بطريقة المؤثر

1. نحول المعادلة (1) لصيغة المؤثر
2. نجد المقدار المؤثر ويكون عدد الحدود بعد التحليل مساوياً لرتبة المعادلة التفاضلية
3. نفترض $u_1 = c_1$ ، $u_2 = \ldots$ وهكذا وعدد الفرضيات يكون مساوياً لـ $(n-1)$
4. نعوض بالفرضية في المعادلة التفاضلية وبالتبسيط نحصل على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأول نحلها بعامل التكامل ثم بالتكامل والتعويض عن الفرضية نحصل على الحل العام والذي يحتوي على n من الثوابت

Exercises 1) Find the value of each of the following

1. $(D^3+1)\sin 2x$ 2. $(xD-3)(D+2)(x^2+x-4)$

3. $(x^3D^3)(x^2+2e^x)$

2) Solve the D.E.

1. $y''-4y'+3y=2x+1$ 2. $y'''-3y'+2y=1$

3. $y'''+3y''-y'-3y=0$

Linear homogenous D.E. with constant coefficient

linear homogenous D.E. of order n with constant coefficient has the form:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n y=0 \quad ---(1)$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constants

we can rewrite eq.(1) as the following:

$$f(D)y=(D-K_1)(D-K_2)\cdots(D-K_n)y=0$$

then the algebraic equation of this eq.

$f(K)=(K-K_1)(K-K_2)\cdots(K-K_n)=0$ called auxiliary equation المعادلة المساعدة

The equation $K^n+a_1K^{n-1}+\cdots+a_{n-1}K+a_n=0 \quad ---(2)$

Called characteristic equation of (1) (المعادلة المميزة)
the roots of this equation, we can find it in three (جذور)
cases:

Case 1: if the roots of (2) real and distinct, i.e. (حقيقية متمايزة)
$k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq \cdots \neq k_n$, then D.E. has solution of the
form $y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \cdots + c_n e^{k_n x}$

Case 2: if the roots of (2) real and equal, then D.E. (حقيقية متساوية)
has solution $y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{n-1}) e^{kx}$
where $k = k_1 = k_2 = \cdots = k_n$

Case 3: if the roots of (2) Complex i.e if $k_1 = a + ib$ (مركبة (تخيلية))
$k_2 = a - ib$, then the solution of D.E. (1) has the form:

$y(x) = e^{ax}[A \cos bx + B \sin bx]$, where A, B Constants.

Example (49): solve the following D.Es.

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$

solutions: the charatersitc equation of D.E. is (المعادلة المميزة)

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$(k+3)(k+2) = 0 \Rightarrow k_1 = -3, \; k_2 = -2$$

Since k_1, k_2 are real and distinct, then
the general solution of eq.

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

2. $y'' - 2y' - 3y = 0$

Solution: the characteristic equation of D.E. is

$$k^2 - 2k - 3y = 0$$

$$(k-3)(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 3 \,,\; k_2 = -1$$

جذور حقيقية مختلفة

then $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Solution: the characteristic eq. of D.E. is

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$$

$$k^2(k-2) - (k-2) = 0$$

$$(k-2)(k^2-1) = 0$$

$$(k-2)(k-1)(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 2 \,,\; k_2 = 1 \,,\; k_3 = -1$$

جذور حقيقية مختلفة

then $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Solution: the characteristic eq. of D.E. is

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)(k-2) = 0$$

$\therefore k = k_1 = k_2 = 2$ جذور حقيقية متساوية

$\therefore y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

5. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Solution: the characteristic eq. of D.E. is

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k-3)(k-3) = 0$$

$\therefore k = k_1 = k_2 = 3$ جذور الحقيقية متساوية

$\therefore y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$

6. $y'' + y' + y = 0$

Solution: the characteristic eq. of D.E. is

$$k^2 + k + 1 = 0$$ حل بالدستور

$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1$

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$\therefore k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

جذور مركبة ( )

$\therefore y(x) = e^{-1/2 x}\left[A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right]$

7. $y'' + 2y' + 2y = 0$

Solution: the characteristic eq. of D.E. is

$$k^2 + 2k + 2 = 0$$ حل بالدستور

$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 2$

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$k_1 = -1+i$, $k_2 = -1-i$ جذور عقدية (مركبة)

$\therefore y(x) = e^{-x}[A\cos x + B\sin x]$

8. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

Solution: the characteristic eq of D.E. is

$k^4 - 5k^2 + 4 = 0$

$(k^2-4)(k^2-1) = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 1, k_4 = -1$

جذور حقيقية مختلفة

$\therefore y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{x} + c_4e^{-x}$, c_1, c_2, c_3, c_4 Constants

9. $y^{(4)} - 16y = 0$

Solution: the characteristic eq. of D.E. is

$k^4 - 16 = 0 \Rightarrow (k^2-4)(k^2+4)$

$\Rightarrow k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 2i, k_4 = -2i$

$\therefore$ the general solution is

$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + e^{0x}[c_3\cos 2x + c_4\sin 2x]$

$= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$, c_1, c_2, c_3, c_4 constants.

Exercises: A) Find the general solution for the following

1. $y'' + 3y' = 0$ 2. $y'' + 5y' + 6y = 0$ 3. $y'' - y' - 6y = 0$

4. $y'' - 2y' - 3y = 0$ 5. $y''' + 4y'' = 0$ 6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$