الاتجاه العام غير الخطي

ثانياً: المعادلة الاسية: **Exponential Equation**

وتسمى في بعض الاحيان بالمعادلة نصف اللوغارتمية **ويعرف الاتجاه العام الأسي** بانه عبارة عن الاتجاه العام الذي لا تزداد فيه قيمة الظاهرة (y) بكمية ثابتة مطلقة لكل سنة بل بنسب مئوية ثابتة لكل سنة وبعبارة اخرى عندما يتغير المتغير التابع (y) وفق معدل معين اي وفق متوالية هندسية معينة وان المعادلة الاسية تأخذ الشكل الاتي:

$$y_i = ab^t$$

حيث ان:

y_i : تمثل قيمة الظاهرة عند الزمن i. a,b: عبارة عن ثوابت. t : يمثل المتغير المستقل.

يمكن تحويل المعادلة الاسية اعلاه الى معادلة خطية اكثر فائدة من وضعها بالشكل الاسي بعد ادخال اللوغارتم عليها كما يلي:

$$\log(y_i) = \log(a) + t\, log(b) \qquad \text{... (أ)}$$

في المعادلة اعلاه لازال المتغير (t) متوالية ولم يتحول الى $(log(t))$ ولهذا سميت هذه الدالة بالدالة النصف اللوغارتمية ولتقدير المعادلة الاسية باشكالها الخطية يجب تقدير $(log(b), log(a))$ وهذا يقودنا الى تكوين المعادلات الطبيعية اللازمة. بضرب المعادلة (أ) بـ $\sum$ نحصل على:

$$\sum \log(y_i) = n \log(a) + \ log(b)\ \sum t_i \qquad \text{... (1)}$$

بضرب المعادلة (أ) بـ $\sum t_i$ نحصل على:

$$\sum t_i \log(y_i) = \log(a) \sum t_i + \ log(b)\ \sum t_i^2 \qquad \text{... (2)}$$

بالتعويض في المعادلتين وحلهما انياً نجد قيمة كل من $(log(b), log(a))$ ومنها نجد (a,b) ونعوضهما في المعادلة الاسية حيث يتم ايجاد قيمة (a,b) من خلال اخذ العدد المقابل (10^t) لكل من $(log(b), log(a))$.

ويمكن ايضاً تبسيط العمليات الحسابية في ايجاد قيمتي (a,b) بنقل نقطة الاصل بالنسبة للزمن الى قيمته من القيم الوسطى عندئذ فان: $\sum \log(y_i) = n\log(a) + log(b)\,(0)$

$$\log(a) = \frac{\sum \log(y_i)}{n} \quad \ldots(3)$$

$$\sum t_i \log(y_i) = \log(a)\,(0) + log(b) \sum t_i^2$$

$$log(b) = \frac{\sum t_i \log(y_i)}{\sum t_i^2} \quad \ldots(4)$$

مثال: البيانات الاتية تمثل مبيعات احدى الشركات المطلوب ايجاد معادلة المنحنى الاسية (المعادلة نصف اللوغارتمية) والتنبؤ بالمبيعات للعام 1990.

السنة	المبيعات	t	t^2	Log(y)	t log(y)
1985	1	-2	4	0	0
1986	3	-1	1	0.477	-0.477
1987	6	0	0	0.778	0
1988	14	1	1	1.146	1.146
1989	41	2	4	1.613	3.226
المجموع	**65**	**0**	**10**	**4.014**	**3.895**

$$y_i = ab^t$$

$$\log(y_i) = \log(a) + t\,log(b)$$

$$\log(a) = \frac{\sum \log(y_i)}{n} = \frac{4.014}{5} = 0.8028$$

$$log(b) = \frac{\sum t_i \log(y_i)}{\sum t_i^2} = \frac{3.895}{10} = 0.3895$$

$$\log(y_i) = 0.8028 + t\,(0.3895)$$

بأخذ العدد المقابل (10^t) لكل من $(log(b), log(a))$ نحصل على: a=6.35 b=2.45

$$\hat{y}_i = (6.35)(2.45)^t$$

$$y_{1990} = (6.35)(2.45)^3 = 93.384$$

استبعاد اثر الاتجاه العام

هنالك حالتين لاستبعاد اثر الاتجاه العام وهما:

اولاً: استبعاد اثر الاتجاه العام في حالة البيانات يحكمها نموذج ضربي:

يتم استبعاد اثر الاتجاه العام في هذه الحالة بقسمة قيمة الظاهرة الاصلية على القيمة الاتجاهية للظاهرة وهي القيمة النظرية المحسوبة للسلسلة الزمنية وبذلك نحصل على القيم الاصلية منسوبة الى قيمها الاتجاهية وعندما تضرب هذه النسبة في مئة نحصل على النسب المئوية للقيم الاصلية منسوبة ال قيمها الاتجاهية اي ان:

$$y^* = \frac{y}{\hat{y}} \times 100$$

حيث ان: y^* تمثل النسبة المئوية لقيمة الظاهرة مجردة من اثر الاتجاه العام.

مثال: اذا كان لديك بيانات السلسلة الزمنية الاتية المطلوب ايجاد معادلة خط الاتجاه باستخدام طريقة المربعات الصغرى ثم استبعاد اثر الاتجاه العام على افتراض ان البيانات يحكمها نموذج ضربي.

$y^* = \frac{y}{\hat{y}} \times 100$	$\hat{y}$	t^2	t*y	t	y	السنوات
98.678 %	10.134	16	-40.0	-4	10.0	1980
115.392 %	11.006	9	-38.1	-3	12.7	81
104.395 %	11.878	4	-24.8	-2	12.4	82
93.333 %	12.750	1	-11.9	-1	11.9	83
91.763 %	13.622	0	0.0	0	12.5	84
89.692 %	14.494	1	13.0	1	13.0	85
96.967 %	15.366	4	29.8	2	14.9	86
101.613 %	16.238	9	49.5	3	16.5	87
109.293 %	17.110	16	74.8	4	18.7	88
		$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 60$	$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = 52.3$	$\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 122.6$	**المجموع**

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{122.6}{9} = 13.622$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = \frac{52.3}{60} = 0.872$$

$$\hat{y}_i = 13.622 + 0.872t$$

$$\widehat{y_1} = 13.622 + 0.872(-4) = 10.134$$

$$\widehat{y_2} = 13.622 + 0.872(-3) = 11.006$$

وهكذا بقية القيم الاتجاهية تحسب حتى الوصول الى القيمة التاسعة

$$\widehat{y_9} = 13.622 + 0.872(4) = 17.110$$

اما القيم المستبعد منها الاتجاه العام تحسب كالاتي:

$$\boldsymbol{y_1^* = \frac{y}{\hat{y}} \times 100 = \frac{10}{10.134} \times 100 = 98.678\%}$$

$$\boldsymbol{y_2^* = \frac{y}{\hat{y}} \times 100 = \frac{12.7}{11.006} \times 100 = 115.392\%}$$

وهكذا بقية القيم تحسب حتى الوصول الى القيمة التاسعة

$$\boldsymbol{y_9^* = \frac{y}{\hat{y}} \times 100 = \frac{18.7}{17.11} \times 100 = 109.293\%}$$

ثانياً: استبعاد اثر الاتجاه العام في حالة البيانات يحكمها نموذج جمعي:

يمكن ايجاد قيمة الظاهرة مجردة من اثر الاتجاه العام في حالة البيانات يحكمها نموذج جمعي بطرح اثر الاتجاه العام من قيمة الظاهرة حيث ان

قيمة الظاهرة = تأثير الاتجاه العام + تأثير التغيرات الموسمية + تأثير التغيرات الدورية + تأثير التغيرات العشوائية.

وعليه فان قيمة الظاهرة مجردة من اثر الاتجاه العام تحسب كالاتي:

$$y^* = y - \hat{y}$$

ويمكن توضيح ذلك بأخذ المثال السابق في حالة نموذج الضرب على فرض ان نموذج السلسلة الزمنية المستخدم هو نموذج الجمع كالاتي:

السنوات	y	t	t*y	t^2	$\hat{y}$	$y^* = y - \hat{y}$
1980	10.0	-4	-40.0	16	10.134	-0.134
81	12.7	-3	-38.1	9	11.006	1.694
82	12.4	-2	-24.8	4	11.878	0.522
83	11.9	-1	-11.9	1	12.750	-0.85
84	12.5	0	0.0	0	13.622	-1.122
85	13.0	1	13.0	1	14.494	-1.494
86	14.9	2	29.8	4	15.366	-0.466
87	16.5	3	49.5	9	16.238	0.262
88	18.7	4	74.8	16	17.110	1.59
المجموع	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \mathbf{122.6}$	$\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = \mathbf{52.3}$	$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 60$		

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{122.6}{9} = 13.622$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = \frac{52.3}{60} = 0.872$$

$$\hat{y}_i = 13.622 + 0.872t_i$$

$$\hat{y_1} = 13.622 + 0.872(-4) = 10.134$$

$$\widehat{y_2} = 13.622 + 0.872(-3) = 11.006$$

وهكذا بقية القيم الاتجاهية تحسب حتى الوصول الى القيمة التاسعة

$$\hat{y_9} = 13.622 + 0.872(4) = 17.110$$

اما القيم المستبعد منها الاتجاه العام تحسب كالاتي:

$$\boldsymbol{y_1^* = y - \hat{y} = 10 - 10.134 = -0.134}$$

$$\boldsymbol{y_2^* = y - \hat{y} = 12.7 - 11.006 = 1.694}$$

وهكذا بقية القيم تحسب حتى الوصول الى القيمة التاسعة

$$\boldsymbol{y_9^* = y - \hat{y} = 18.7 - 17.11 = 1.59}$$