ثانياً: طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

تعد طريقة المربعات الصغرى من ادق الطرق لتقدير معادلة خط الاتجاه العام، وبافتراض ان خط الاتجاه العام هو خط مستقيم فان معادلته يتم كتابتها بالشكل الاتي:

$$\mathrm{y}_i = a + bt_i + \varepsilon_i$$

حيث ان: y_i : تمثل قيمة المشاهدة ذو الرقم (i).

t_i : تمثل تسلسل السنة ذات الرقم (i). ε_i : تمثل الخطأ العشوائي ذو الرقم (i).

a , b: عبارة عن ثوابت يمثلان معلمات معادلة خط الاتجاه العام.

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى التي تجعل مجموع مربعات الخطأ $(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2)$ اقل مايمكن وبعد اجراء التفاضل الجزئي بالنسبة الى (a و b) نحصل على القيم التقديرية لمعلمات خط الاتجاه العام $(\hat{b})$ و $(\hat{a})$ وكالاتي:

$$\varepsilon_i = \mathrm{y}_i - a - bt_i$$

$$\varepsilon_i^2 = (\mathrm{y}_i - a - bt_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i - a - bt_i)^2 \qquad \ldots.(1)$$

بأخذ المشتقة (التفاضل الجزئي) للمعادلة (1) بالنسبة الى (a) ومساوات المشتقة بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i - a - bt_i)$$

$$0 = -2\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i - a - bt_i)$$

بضرب طرفي المعادلة اعلاه بـ $(-1/2)$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i - a - bt_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad \ldots.(2)$$

$$na = \sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} \qquad \ldots(3)$$

وباخذ المشتقة للمعادلة (1) بالنسبة لـ (b) وكذلك مساواة المشتقة بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bt_i)t_i$$

$$0 = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bt_i)t_i$$

بضرب طرفي المعادلة اعلاه بـ $(-1/2)$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bt_i)t_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - b\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \qquad \ldots.(4)$$

وبتعويض قيمة $(\hat{a})$ في المعادلة اعلاه نحصل على قيمة

$$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} t_i + b\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{n} - b\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{n} + b\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = b\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{n}\right)$$

ضرب طرفي المعادلة بـ (n)

$$n\sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} t_i = b\left\{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right\}$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2} \qquad \ldots .(5)$$

وبتعويض القيم التقديرية للمعلمتين $\hat{a}$ و $\hat{b}$ في معادلة خط الاتجاه العام نحصل على معادلة خط الاتجاه العام التقديرية (التنبؤية) وعلى النحو الاتي:

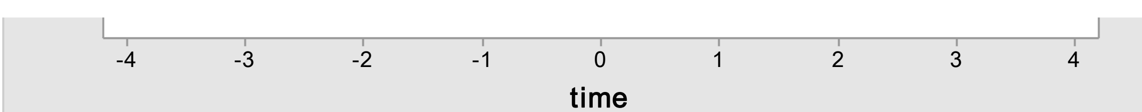
$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$$

يتم استخدم المعادلتين (3) و (5) لتقدير المعلمتين $\hat{a}$ و $\hat{b}$ في حالة اعطاء السنوات تسلسلات (t=1,2,3,4,5,…) بغض النظر عن عدد سنوات السلسلة الزمنية. إذا كانت قيمة ($\hat{b}$) اشارتها موجبة هذا يعني ان قيمة الظاهرة ($\hat{y}$) في تزايد مستمر أما إذا كانت قيمة ($\hat{b}$) اشارتها سالبة فان قيمة ($\hat{y}$) في تناقص.

يمكن تبسيط العمليات الحسابية في ايجاد قيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بنقل نقطة الاصل بالنسبة للزمن الى القيم الوسطى وعندئذ لتحديد نقطة الاصل هناك حالتين:

1- اذا كان عدد القيم فردياً:

تأخذ قيمة الزمن صفر عند القيمة الوسطى فتكون الفترات الزمنية التالية لها هي (1,2,3,….) اما الفترات السابقة لها (−1,−2,−3,….) وبهذا يكون مجموع القيم مساوياً للصفر اي ($\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$) وكما موضح في الشكل الاتي:



$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

وباستخدام المعادلات الطبيعية السابقة لتعيين قيمة $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بطريقة المربعات الصغرى نعوض في المعادلة (2) عن $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$ نحصل على قيمة $\hat{a}$:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$na = \sum_{i=1}^{n} y_i - b(0) \rightarrow na = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad \dots (6)$$

نعوض في المعادلة (4) عن $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$ نحصل على قيمة $\hat{b}$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - b\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i - a(0) - b\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

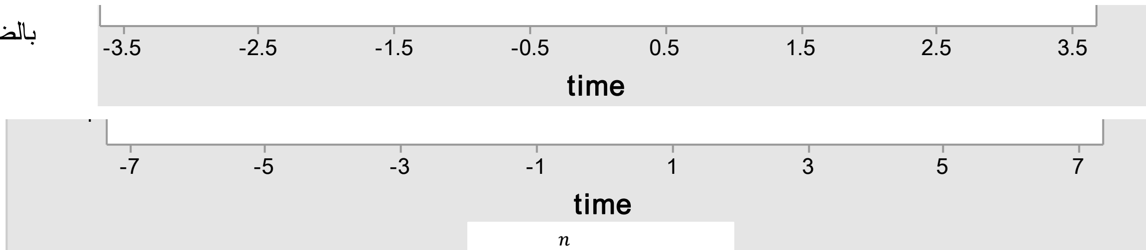
$$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = b\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \quad \dots . (7)$$

2- اذا كان عدد القيم زوجياً:

في هذه الحالة نأخذ الصفر بين القيمتين الوسطيتين فإذا ما اعتبرنا ان وحدة الزمن نصف الفترة فان قيم الزمن في النصف الاول من السلسلة سيكون(1,3,5,7,…) وفي النصف الاعلى من السلسلة (…,7−,5−,3−,1−) وبهذا سيكون $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$ كما موضح في الشكل الاتي:

بالضرب × 2



$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

مثال (1): جد معادلة خط الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى للسلسة الزمنية التالية عندما $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$ والتنبؤ بقيمة الانتاج لسنة 1990.

السنوات	الانتاج	t	t*y	t^2
1980	10.0	-4	-40.0	16
1981	12.7	-3	-38.1	9
1982	12.4	-2	-24.8	4
83	11.9	-1	-11.9	1
84	12.5	0	0.0	0
85	13.0	1	13.0	1
86	14.9	2	29.8	4
87	16.5	3	49.5	9
88	18.7	4	74.8	16
المجموع	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 122.6$	$\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = 52.3$	$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 60$

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{122.6}{9} = 13.62$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = \frac{52.3}{60} = 0.87$$

$$\hat{y}_i = 13.62 + 0.87t$$

نعوض عن قيمة t في المعادلة اعلاه بالرقم (6) لان تسلسل سنة 1990 في السنوات هو الرقم (6)

$$\hat{y} = 13.62 + 0.87(6) = 18.84$$

مثال (2): البيانات الاتية تمثل استيرادات العراق من حديد التسليح بالألف الاطنان للفترة من 1991−2000 المطلوب:

1− تقدير معادلة خط الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى عندما $\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$.

2− تقدير معادلة خط الاتجاه العام بطريقة متوسطي نصفي السلسلة .(واجب)

السنوات	الاستيراد	t	t*y	t^2
1991	40	-9	-360	81
92	35	-7	-245	49
93	65	-5	-325	25
94	50	-3	-150	9
95	60	-1	-60	1
96	70	1	70	1
97	80	3	240	9
98	75	5	375	25
99	85	7	595	49
2000	90	9	810	81
المجموع	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 650$	$\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} y_i t_i = 950$	$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 330$

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{650}{10} = 65$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = \frac{950}{330} = 2.88$$

$$\hat{y}_i = 65 + 2.88t$$