الانحدار غير الخطي المتعدد : Multiple curvilinear Regr

في هذه الحالة تكون الصيغة العامة لهذا النموذج بحيث أنه ولكل متغير يكون هناك علامة جمع خاصة به فمثلا إذا كان لدينا نموذج لمتغيرين من الدرجة الثانية فيكون لدينا علامتي جمع وكما هو موضح فيما يلي :

$$\hat{Y} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\hat{\beta}_{ij}X_1^i X_2^j \qquad i+j \le K$$

حيث Kتمثل درجة المعادلة

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{10} + \hat{\beta}_{01} X_{i2}$$

درجة أولى

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{10} + \hat{\beta}_{01} X_{i2} + \hat{\beta}_{20} X^2_{i1} + \hat{\beta}_{02} X^2_{i2} + \hat{\beta}_1 X_1 X_2$$

درجة ثانية

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{10} + \hat{\beta}_{01} X_{i2} + \hat{\beta}_{20} X^2_{i1} + \hat{\beta}_{02} X^2_{i2} + \hat{\beta}_1 X_1 X_2 + \hat{\beta}_{30} X^3_{i1} + \hat{\beta}_{03} X^3_{i2} + \hat{\beta}_{i2} X_1 X^2_2 + \hat{\beta}_{21} X^2_1 X_2$$

وكذلك الحال لمعادلة الانحدار غير المستقيم المتعدد لثلاثة متغيرات من الدرجة k

$$\hat{Y} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}\hat{\beta}_{ijl}X_1^i X_2^j X_3^l \qquad i+j+l \le K$$

فمثلا معادلة من الدرجة ثانية (k=2)لثلاث متغيرات هي:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_{000} + \hat{\beta}_{100} X_1 + \hat{\beta}_{010} X_2 + \hat{\beta}_{001} X_3 + \hat{\beta}_{200} X^2_1 + \hat{\beta}_{020} X^2_2 + \hat{\beta}_{002} X^2_3 + \hat{\beta}_{110} X_1 X_2 + \hat{\beta}_{101} X_1 X_3 + \hat{\beta}_{011} X_1 X_3$$

*وصف البيانات Data Description

إذا أردنا على سبيل المثال ترتيب البيانات لإيجاد معادلة من الدرجة الثانية لمتغيرين مستقلين مثلا فيكون الترتيب كما يلي:

y_i	x_{i1}	x_{i2}	x^2_{i1}	x^2_{i2}	$x_{i1}x_{i2}$
y_1	x_{11}	x_{12}	x^2_{11}	x^2_{12}	$x_{11}x_{12}$
y_2	x_{21}	x_{22}	x^2_{21}	x^2_{22}	$x_{21}x_{22}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
y_n	x_{n1}	x_{n2}	x^2_{n1}	x^2_{n2}	$x_{n1}x_{n2}$

ويمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية على هذه المتغيرات كما في الانحدار الخطي المتعدد وذلك كما يلي:

نعوض عن المعلمات والمتغيرات كما يلي، ولنأخذ متغيرين من الدرجة الثانية

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 & \beta_{00} &= \beta_0 \\ x_2 &= x_2 & \beta_{10} &= \beta_1 \\ x_3 &= x^2_1 & \Rightarrow\ \beta_{01} &= \beta_2 \\ x_4 &= x^2_2 & \beta_{20} &= \beta_3 \\ x_5 &= x_1x_2 & \beta_{11} &= \beta_5 \end{aligned}$$

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underline{Y}) \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{i5} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X^2_{i1} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}X_{i5} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{15} & \sum_{i=1}^{n} X_{i5}X_{i1} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X^2_{i5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \\ . \\ . \\ . \\ \sum x_{i5}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_5 \end{bmatrix}$$

اختبار الفرضيات: Test of Hypotheses

لنفس المثال الذي لدينا لمتغيرين يمكن اختبار الفرضية

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots\ldots = \beta_5 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \ldots\ldots\ldots \neq \beta_5 \neq 0$$

S.O.V	D.F	SS	MS	Cal.F
$R(x_1,x_2 \ldots x_5)$ Or $R(x_1,x_2, x^2_1,x^2_2, x_1x_2)$	M	**SSR**	$\frac{SSR}{m}$	$\frac{MSR}{MSe}$
Error	n-(m+1)	SSE	$\frac{SSe}{n-(m+1)}$	
Total	**n−1**			

فمثلا لو أردنا اختبار معامل انحدار معين

مثال : ص 267–271 خاشع الراوي

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots\ldots = \beta_5 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \ldots\ldots\ldots \neq \beta_5 \neq 0$$

S.O.V	D.F	SS	MS	Cal.F
$R(x_1,x_2 \ldots x_5)$	m	$\mathrm{SSR} = \underline{\beta}' X' \underline{y} - n\bar{y}^2 = 55105$	$\frac{SSR}{m} = 11021$	7127.5
Error	n-(m+1)	$SSe = SST - \mathrm{SSR}$ $= \underline{y}'\underline{y} - \underline{\beta}' X' \underline{y} = 12.555$	$\frac{SSe}{n-(m+1)} = 1.5463$	
Total		$SST = \underline{y}'\underline{y} - n\bar{y}^2$		

ترفض فرضية العدم وتقبل البديلة

أي هناك على الأقل أحدى معاملات الانحدار الجزئي لاتساوي صفر

$H_0 : \beta_5 / \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = 0$
$H_1 : \beta_5 / \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \neq 0$

S.O.V	D.F	SS	MS	Cal.F
$R(x_1,x_2...x_5)$	5	55105	11021	
$R(x_1,x_2\,x_3x_4)$	4		55103	7127.5
$R(x_5/x_1,x_2\,x_3x_4)$	1		2	
Error	12	12.555	1.54	
Total	**17**			

تقبل فرضية العدم وليس هناك أهمية للتداخل في تفسير التغيرات الحاصلة في Y

تحديد درجة المعادلة في الانحدار غير الخطي المتعدد

يتم تحديد درجة المعادلة باستخدام الطريقة العكسية وكما يلي:

نأخذ الدرجة التي نعتقدها ملائمة للبيانات ويفضل أن لاتزيد عن الدرجة الثالثة أو الرابعة كحد أعلى وذلك لصعوبة تفسير الدرجات الأعلى من الثالثة،فمثلا نختبر حدود الدرجة الثانية لها أهمية في تفسير التغيرات الحاصلة في Y

(1)
$H_0 : \beta_{20} = \beta_{02} = \beta_{11} / \beta_{10}\beta_{01} = 0$
$H_1 : \beta_{20} \neq \beta_{02} \neq \beta_{11} / \beta_{10}\beta_{01} \neq 0$

$0R$
$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 / \beta_1\beta_2 = 0$
$H_1 : \beta_3 \neq \beta_4 \neq \beta_5 / \beta_1\beta_2 \neq 0$

م/ عندما نختبر درجة معينة يجب أن تكون Given كافة حدود الدرجة الاقل منها كما هو واضح في (1) قبول H_0 فيها تعني ليس للدرجة الثانية تأثير على التغيرات الحاصلة في y أي الاختبار غير معنوي فنشطب الدرجة الثانية ويصبح النموذج من الدرجة الاولى

مثال: نطبق هذا الاختبار على المثال السابق ص371-374 خاشع الراوي

$SSR((x_1,x_2)\,x^2_1,x^2_2,\,x_1x_2)=55105$ d.f=5

$SS\,R(\,x_1x_2) =54469$ d.f=2

$SSR((x_1,x_2\,)x^2_1,x^2_2,/\,x_1x_2)=636$ d.f=3

$SSE((x_1,x_2)\ x^2_1,x^2_2,\ x_1x_2)=18.555$ d.f=12

إذا تقبل H_1 وهذا يعني أنه على الأقل أحد حدود الدرجة الثانية له أهمية في تفسير التغيرات الحاصلة في y ولهذا تحتاج إلى اختبار كل حد منة حدود الدرجة الثانية لمعرفة أيهما يؤثر.

$SSR(x^2_1\ /(x_1,x_2)x^2_2,\ x_1x_2)=414$ Cal.F=267.74 > 4.75

$SSR(\ x^2_2\ /(x_1,x_2)\ x^2_1,\ x_1x_2)=3$ Cal.F=1.94 < 4.75

$SSR((x_1,x_2)/\ x^2_1,x^2_2,\ x_1x_2)=3$ Cal.F=1.94 < 4.75

وقبول فرضية الدرجة الثانية للمتغير الأول فعندها ندخل الدرجة الأولى له سواء كان معنوي أولا ولايحتاج إلى اختبار بل الاختبار الباثي فقط هو X_2 فقط وكما يلي

$$\hat{y} = \hat{\beta}_{00} + \hat{\beta}_{10}\ X_1\ +\ \hat{\beta}_{01} X_2\ +\ \hat{\beta}_{20}\ X^2_1$$

وباستخدام(Ls)نجد المعادلة وكانت كما يلي:

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underline{Y}) = \begin{bmatrix} -76.36 \\ 1.888 \\ 4.06 \\ 0.051 \end{bmatrix}$$

S.O.V	D.F	SS	MS	Cal.F
$R(x_1,x_2\,x^2_1)$	3			
$R(x_1\,x^2_1)$	2	1370	1370	825.998
$R(x_2/x_1\,x^2_1)$	1	23.22	1.65	
Error	14			
Total	17			

إذا ل x_2 أهمية في تفسير التغيرات الحاصلة في y ولهذا يبقى في النموذج

مثال:

لو كان لدينا ثلاث متغيرات في معادلة الانحدار $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \hat{\beta}_3 X_{i3}$

s.o.v	df
$SSR(x_1 x_2 x_3)$	**3**
$SSR(x_2 x_3 / x_1)$	**1**
$SSR(x_3 / x_1 x_2)$	**2**
$E(x_1 x_2 x_3)$	**n−4**

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq 0$

$H_0 : \beta_3 / \beta_1 \beta_2 = 0$
$H_1 : \beta_3 / \beta_1 \beta_2 \neq 0$

$H_0 : (\beta_3 = \beta_2) / \beta_1 = 0$
$H_1 : (\beta_3 = \beta_2) / \beta_1 \neq 0$