تقدير تباين المجتمع MSe او S^2 او $\hat{\sigma}^2$:

لدينا مجموع المربعات الخطاء هو

$$\Rightarrow SS_e = \sum_{i=1}^{n}(e-\bar{e})^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \underline{e}'\underline{e}$$

$$= (\underline{y}-\underline{\hat{y}})'(\underline{y}-\underline{\hat{y}})$$

$$= (\underline{y}'-\underline{\hat{\beta}}'\underline{X}')(\underline{y}-X\underline{\hat{\beta}})$$

$$= \underline{y}'\underline{y} - y'X\underline{\hat{\beta}} - \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{y} + \underline{\hat{\beta}}'X'X\underline{\hat{\beta}}$$

$$= \underline{y}'\underline{y} - 2\underline{\hat{\beta}}'X'\underline{y} + \underline{\hat{\beta}}'X'X\underline{\hat{\beta}}$$

$$= \underline{y}'\underline{y} - 2\underline{\beta}'X'\underline{y} + \underline{\hat{\beta}}'X'\underline{y}$$
$$= \underline{y}'\underline{y} - \underline{\beta}'X'\underline{y}$$

And $\underline{\underline{\hat{\beta}'X'y}} = \left(\underline{y}'X\underline{\hat{\beta}}\right)'$

إذا

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_e}{d.f} = \frac{\underline{y}'\underline{y} - \underline{\beta}'X'\underline{y}}{n-(m+1)} \qquad E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$ Where

وبهذا يكون لدينا التباين المشترك للمعلمات المقدرة $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \, ..., \beta_m$ كما يلي

$$\left.\begin{array}{l} V(\hat{\beta}_j) = \hat{\sigma}^2 c_{jj} \\ V(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 c_{00} \end{array}\right\} COV(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j) = \hat{\sigma}^2 c_{0j}$$

وهكذا لأي من المعلمات المقدرة $\hat{\beta}_{j's}$

خواص المقدرات بطريقة المربعات الصغرى:

بالإضافة إلى الخواص المذكورة أعلاه حول تباين المجتمع ومصفوفة التباين للمعلمات المقدرة تتميز مقدرات المربعات الصغرى كذلك بخاصية عدم التحيز أي أن:

$\underline{\hat{\beta}}$ is unbiased estimat of $\underline{\beta}$

proof:

$$we\ \ have\ \hat{\beta}_{OLS}=(X'X)^{-1}X'\mathrm{Y}$$

$$E(\hat{\beta})_{OLS}=E\,[(X'X)^{-1}X'\mathrm{Y}]$$

$$=E\,[(X'X)^{-1}X'\ (\mathrm{X}\beta+\underline{e})]$$

$$=E[(X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'\underline{e}]$$

$$=E[\beta+(X'X)^{-1}X'U]$$

$$\because E(U)=0$$

$$\therefore\ E(\hat{\beta})_{OLS}=\beta$$

$\therefore\ \underline{\hat{\beta}}$ is unbiasd eat of $\underline{\beta}$

تباين متوسط الاستجابة:

$$we\ \ have\ \hat{Y}_1=\ \hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\ X_{i1}\ +\ \hat{\beta}_2\,X_{i2}\ +\ldots+\hat{\beta}_{\ m}\,X_{im}$$

$$\underline{x}'_0=[1\quad x_{i1}\quad \ldots\ .\ \ .\quad x_{im}]$$

للمشاهدة الأولى

$$\underline{x}'_0=[1\quad x_{11}\quad \ldots\ .\ \ .\quad x_{1m}]$$

$$\therefore \hat{y}_1=\underline{x}'_0\,\underline{\hat{\beta}}$$

$$V(\hat{y}_0)=\hat{\sigma}^2X'_0(X'X)^{-1}X_0$$

معامل الانحدار الجزئي القياسي Standard partial regr.coeff

هو عبارة عن معامل الانحدار الجزئي عندما تكون كل متغير على شكل قياسي

$$X_i^* = \frac{X_i - \overline{X}}{S_{X_i}} \qquad\qquad Y_i^* = \frac{Y_i - \overline{Y}}{S_{Y_i}}$$

$$S_{X_i} = \sqrt{S_{X_i}^2} = \sqrt{\frac{S_{X_i X_i}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum X_{i1} - \frac{(\sum X_{i1})^2}{n}}{n-1}}$$

$$S_{Y_i} = \sqrt{S_{Y_i}^2} = \sqrt{\frac{S_{Y_i Y_i}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum Y_{i1} - \frac{(\sum Y_{i1})^2}{n}}{n-1}}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\beta}_j^* &= \hat{\beta}_j \left(\frac{S_{X_i}}{S_{Y_i}}\right) \\ \hat{\beta}_j &= \hat{\beta}_j^* \left(\frac{S_{Y_i}}{S_{X_i}}\right) \end{aligned}\right\} \rhd \hat{Y}^*_1 = \hat{\beta}^*_0 + \hat{\beta}^*_1 X^*_{i1} + \hat{\beta}^*_2 X^*_{i2} + \ldots + \hat{\beta}^*_m X^*_{im}$$

وهنا $\hat{\beta}_0$ يساوي صفر لاننا طرحنا $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ من المتغيرات

ولكون $\hat{\beta}_j^*$ خالي من وحدات القياس لذا فهو يشير إلى الأهمية النسبية للمتغير في التنبؤ ب Y ،فمثلا لو كان $\hat{\beta}_j^*$ ضعف قيمة $\hat{\beta}_j^*$ فان أهمية X_1 هي ضعف أهمية X_2 فمثلا

$$\left.\begin{aligned} \hat{Y}_i &= 2 - 5X_1 + 3X_2 - 10X_3 \\ \hat{Y}_i^* &= - X_1 + 5X_2 - 2X_3 \end{aligned}\right\}$$

أهمية X_1 هي ضعف أهمية X_2 في تقدير التنبؤ لـ Y مثلاً :

تأثير x_3 على التنبؤ هو ضعف أضعاف

تأثير x_1 على Y وله 2.5 مرة أهمية من x_3 ولـ x_3 ذو أهمية ضعف x_1

أمثلة حول الانحدار المتعدد

مثال 1: إذا كانت لديك البيانات التالية:

Y	1	3	5	2	2	6
X_1	2	4	1	3	1	2
X_2	4	16	1	9	1	4

م/1-جد معادلة الانحدار المتعدد 2- جد قيمة تباين معاملات الانحدار وكذلك التباين المشترك ل $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ 3- جد متوسط الاستجابة وتباين متوسط الاستجابة عند $x_1=3$ و $x_2=7$

Sol:

$$\sum X_1^2 = 35 \qquad \sum X_1 Y = 39$$
$$\sum X_2^2 = 371 \qquad \sum X_1 X_2 = 109$$
$$\sum Y = 79 \qquad \sum X_2 Y = 101$$

ومعادلة الانحدار لهذه المسألة ستكون:

$$\hat{Y}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$$

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ . & . & . \\ & & \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{X'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 4 & \dots & 2 \\ 4 & 16 & \dots & 4 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 35 \\ 13 & 35 & 109 \\ 35 & 109 & 371 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X'Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 4 & \dots & 2 \\ 4 & 16 & \dots & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 39 \\ 101 \end{bmatrix}$$

نوجد معكوس للمصفوفة باستخدام احد الطرق

الآن نجد المعكوس للمصفوفة بطريقة Doolittle :

L.N.	$\underline{X'X}$			$\underline{I}$			check
1	6	13	35	1	0	0	55
2	13	35	109	0	1	0	158
3	35	109	371	0	0	1	516
4	6	13	35	1	0	0	55
5	1	2.1667	5.8333	0.1667 = 1/6	0	0	9.1667
6		6.8329	33.167	−2.1671	1	0	
7		1	4.8540	−0.3172	0.1464	0	5.6532
8			5.8414	4.6861	−4.8566	1	
9			1	0.8022	−0.83125	0.17..	

العمود الأخير من $(X'X)^{-1}$

$$\therefore \underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 4.6 & -4.2 & 0.8022 \\ & 4.171 & -0.83123 \\ & & 0.17119 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 19 \\ 39 \\ 101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.62 \\ 0.62 \\ 0.114 \end{bmatrix}$$

$$2-\hat{\sigma}^2=\frac{SS_e}{d.f}=\frac{\underline{y}'\underline{y}-\underline{\beta}'X'\underline{y}}{n-(m+1)}$$

$$\underline{\beta}'X'\underline{y}=\begin{bmatrix}4.62 & 0.62 & 0.114\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}19\\39\\101\end{bmatrix}=56.979$$

$$\underline{y}'\underline{y}=79$$

$$\therefore\hat{\sigma}^2=7.34$$

$$V(\underline{\hat{\beta}})=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}=7.34\begin{bmatrix}4.6 & -4.2 & 0.8022\\ & 4.171 & -0.83123\\ & & 0.17119\end{bmatrix}$$

$$V(\hat{\beta}_0)=\hat{\sigma}^2C_{00}=33.764$$

$$V(\hat{\beta}_1)=\hat{\sigma}^2C_{11}=5.42$$

$$V(\hat{\beta}_2)=\hat{\sigma}^2C_{22}=0.222$$

$$COV(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)=\hat{\sigma}^2C_{12}=-1.0767$$

3−

$$\hat{Y}_1=\ 4.62+0.62\ X_{i1}\ +\ 0.114X_{i2}$$

$$\hat{Y}_1=\ 4.62+0.62\ (3)+\ 0.114(7)$$

$$=2.163$$

او

$$\therefore\hat{y}_1=\underline{x}'_0\underline{\hat{\beta}}$$

$$\hat{y}_1=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}4.62\\0.62\\0.114\end{bmatrix}=2.163$$

$$V(\hat{y}_0)=\hat{\sigma}^2X'_0(X'X)^{-1}X_0$$

$$V(\hat{y}_0)=7.34*\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}4.6 & -4.2 & 0.8022\\ & 4.171 & -0.83123\\ & & 0.17119\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix}=8.0899$$