مثال2 :إذا كانت لديك المعلومات التالية:

$$n=10 \qquad \sum X_1=32 \qquad \sum X_2=28 \qquad \sum X_3=38$$

$$\sum X_1^2=132 \qquad \sum X_1Y=737.6 \qquad \sum X_2^2=108$$

$$\sum X_1X_2=72 \qquad \sum X_1X_3=148 \qquad \sum X_2X_3=68$$

$$\sum Y=246.2 \qquad \sum X_2Y=748 \qquad \sum X_3Y=943.4$$

$$\sum Y^2=6480.16 \qquad \sum X_3^2=222$$

م/1-إيجاد معادلة الانحدار المتعدد باستخدام المصفوفات 2-إيجاد تباينات المعلمات المقدرة

SOL:

$$1-(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 & \sum X_3 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 & \sum X_1X_3 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2X_3 \\ \sum X_3 & \sum X_1X_3 & \sum X_2X_3 & \sum X_3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 32 & 28 & 38 \\ 32 & 132 & 72 & 148 \\ 28 & 72 & 108 & 68 \\ 38 & 148 & 68 & 222 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X'Y}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \\ \sum x_{i3}y_i \\ \sum x_{i4}y_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 246.2 \\ 737.6 \\ 748 \\ 943.4 \end{bmatrix}$$

وبعد إيجاد معكوس المصفوفة (XX)

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix} 3.171875 & -0.209375 & -0.53125 & -0.240625 \\ & 0.0535416 & 0.0229166 & -0.006875 \\ & & 0.10416667 & 0.04375 \\ & & & 0.03687 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{\beta}}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{bmatrix} 2.1 \\ -1.4 \\ 5.3 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

2–

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_e}{d.f} = \frac{\underline{y}'\underline{y} - \underline{\beta}'X'\underline{y}}{n-(m+1)}$$

$$\underline{\beta}'X'\underline{y} = \begin{bmatrix}2.1 & -1.4 & 5.3 & 3.2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}246.2\\737.6\\748\\943.4\end{bmatrix} = 6468.08$$

$$\underline{y}'\underline{y} = 6480.16$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2 = 2.013$$

$$\therefore V(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = (2.013) \begin{bmatrix} 3.17187 & -0.20937 & -0.53125 & -0.240625 \\ & 0.053541 & 0.022916 & -0.00687 \\ & & 0.104166 & 0.04375 \\ & & & 0.03687 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 C_{00} = (2.013)(3.17187) = 6.385$$

$$V(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 C_{11} = (2.013)(0.053541) = 0.108$$

$$V(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 C_{22} = (2.013)(0.104166) = 0.2097$$

$$V(\hat{\beta}_3) = \hat{\sigma}^2 C_{33} = (2.013)(0.03687) = 0.074$$

Activate Windo
Go to Settings to ac

جدول تحليل التباين Analysis of Variance Table

يكون جدول تحليل التباين كما في الانحدار البسيط ولكن لعدة متغيرات وكما يلي:

S.O.V	D.F	SS	MS	Cal.F
Due to regression $R(x_1,x_2...x_m)$	m	$SSR(x_1,x_2\dots x_m)=\underline{\beta}'X'\underline{y}-n\bar{y}^2$	$\frac{SSR}{m}$	$\frac{MSR}{MSe}$
Error	n-(m+1)	$SSe=SST-SSR(x_1,x_2\dots x_m)$ $=\underline{y}'\underline{y}-\underline{\beta}'X'\underline{y}$	$\frac{SSe}{n-(m+1)}$	
Total		$SST=\underline{y}'\underline{y}-n\bar{y}^2$		

وترفض فرضية العدم إذا كان

$$Cal.F \geq Tab.F = F(\alpha,m,n-m-1)$$

بعض الملاحظات:

1-يستخدم اختبار F إذا كانت لدينا أكثر من متغير مستقل واحد

2-عند التحول من الانحدار البسيط إلى الانحدار المتعدد فان SST يبقى ثابتا لأنه جاء من قيم y وليس له علاقة بقيم x، أي أن التغير يكون فقط في مجموع مربعات ودرجات الحرية للانحدار

$R(x_1,x_2,\dots,x_m)$ وكذلك للأخطاء $E(x_1x_2...x_m)$

اما الفرضية التي يتم اختبارها فهي

$$H_0:\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_m$$
$$H_1:\beta_1\neq\beta_2\neq\dots\neq\beta_m$$

ويمكن تفسيرها كما يلي

H_0:لايوجد أي متغير مستقل يفسر التغيرات الحاصلة في y أي ان كل المتغيرات المستقلة تضرب في قيم صفرية.

H_1:على الأقل هنالك متغير واحد له أهمية في تفسير التغيرات الحاصلة في y

ومن الجدير بالذكر أن قيم $\hat{\beta}, s$ في فرضية العدم يجب مساواتها بالصفر لان عدم مساواتها بالصفر يعني أن قيم المعلمات متساوية وتساوي قيمة معينة ليس شرط ان تكون صفرا أي انه يوجد نموذج لدينا لذا يجب أن تساوي الصفر

مثال:

إذا كانت لديك المعلومات التالية

$n=11$ $\sum X_1 = 66.373$ $\sum X_2 = -22$

$\sum X_1^2 = 506$ $\sum X_1 Y = 85$ $\sum X_2^2 = 480$ $\sum X_1 X_2 = -346$

$\sum Y = 246.2$ $\sum X_2 Y = 142$ $\sum Y^2 = 289$

م/1-اختبر الفرضية التالية

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

2-الأهمية النسبية لـx_1وx_2 في تأثيرها على y

3-مصفوفة التباين والتباين المشترك

4-إيجاد تباين متوسط الاستجابة عندما $x_1=3$ $x_2=6$

Sol:

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 66 & -22 \\ & 506 & -346 \\ & & 480 \end{bmatrix}$$

$$|XX| = 23804$$

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 4.3705 & -0.8495 & -0.4086 \\ & 0.1690 & 0.0822 \\ & & 0.0422 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 33 \\ 85 \\ 142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$SST = \underline{y}'\underline{y} - n\bar{y}^2 = 289 - 11(9) = 190$$

$$\mathrm{SSR}(x_0) = n\bar{y}^2 = 99$$

$$\mathrm{SSR}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \underline{\beta}' X' \underline{y} - n\bar{y}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -2 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 33 \\ 85 \\ 142 \end{bmatrix} = 122$$

$$SSe = SST - \mathrm{SSR}(x_1, x_2 \ldots x_m) = 190 - 122 = 68$$

S.O.V	D.F	SS	MS	Cal.F
$R(x_1,x_2)$	2	122	61	**7.177**
Error	8	68	8.5	
Total	**10**	**190**		

بما أن

$$Cal.F \leq Tab.F$$

إذا تقبل فرضية العدم أي ليس هناك أهمية للمتغيرات المستقلة في تفسير التغيرات الحاصلة في y

$$2- \quad \hat{\beta}_j^* = \hat{\beta}_j \left(\frac{S_{X_i}}{S_{Y_i}}\right)$$

$$S_{X_1} = \sqrt{S_{X_1}^2} = \sqrt{\frac{S_{X_1X_1}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum X_{i1} - \frac{(\sum X_{i1})^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{11.6} = 3.4059$$

$$S_{X_2} = \sqrt{S_{X_{2i}}^2} = \sqrt{\frac{S_{X_2X_{2i}}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum X_{i2} - \frac{(\sum X_{i2})^2}{n}}{n-1}} = 6.73795$$

$$S_{Y_i} = \sqrt{S_{Y_i}^2} = \sqrt{\frac{S_{Y_iY_i}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum Y_{i1} - \frac{(\sum Y_{i1})^2}{n}}{n-1}} = 4.35$$

$$\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1(\frac{S_{X_1}}{S_{Y_i}}) = -1.56$$

$$\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2(\frac{S_{X_2}}{S_{Y_i}}) = -0.773$$

ومن ملا حظتنا لمعامل الانحدار الجزئي نلاحظ أن تأثير x_1 هو ضعف تأثير x_2 في التنبؤ ب y .

3-

$$V(\underline{\hat{\beta}}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$$

$$= 8.5 \begin{bmatrix} 4.3705 & -0.8495 & -0.4086 \\ & 0.1690 & 0.0822 \\ & & 0.0422 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 37.149 & -7.22075 & -3.473 \\ & 1.4365 & 0.6987 \\ & & 0.3587 \end{bmatrix}$$

4-

$$V(\hat{y}_0) = \hat{\sigma}^2 X_0' (X'X)^{-1} X_0$$

$$8.5 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4.3705 & -0.8495 & -0.4086 \\ & 0.1690 & 0.0822 \\ & & 0.0422 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3.142$$