نظرية الطوابير

د. مناف حازم احمد
قسم الاحصاء والمعلوماتية

المحاضرة ا لاولى

مقدمة Introduction

عرفت نظرية صفوف الانتظار على يد العالم $A.K.Erlang$ عام 1903 بعدما قام بدراسة مسالة الازدحام الموجودة على خط الهاتف حيث بدأ بايجاد الفترات الزمنية لتأجيل المكالمات لانشغال الهاتف وقد طورت هذه الدراسات بعد الحرب العالمية الثانية لتصبح فيما بعد نظرية صفوف الانتظار لتشمل مسائل اخرى . ان تكون خطوط الانتظار هو بطبيعة الحال حالة تظهر عندما يتعدى الطالب على خدمة ما الطاقة المتاحة لتوفير تلك الخدمة ولصعوبة التنبؤ بصورة دقيقة بالوقت الذي تصل فيه الواحدات لطلب الخدمة او الوقت المطلوب لانجاز تلك الخدمة فأن عملية اتخاذ القرارات التي تتعلق بمقدار الطاقة التي تهيأ لانجاز الخدمة هي عملية صعبة .
ان توفير خدمات كثيرة يعني تكاليف زائدة ، وان عدم توفير طاقة خدمية كافية سوف يسبب بتكوين خط انتظار طويل الى حد ما من حين لاخر وهذا يكون مكلف ايضا في بعض النواحي سواء في الكالفة الاجتماعية او كلفة فقدان الزبائن او كلفة الموظفين العاطلين وغيرها من الامور .
الهدف الاساسي لنظرية الطوابير هو خلق توازن بين كلفة الخدمة والكلفة المرتبطة بالانتظار بسبب تلك الخدمة.

نظرية صفوف الانتظار لها تطبيقات واسعة في المجالات الحياتية فأحدى اهم تطبيقات صفوف الانتظار هي المجالات الخدمية ، مثال على ذلك دائرة الجوازات فالموظفين والضباط يمثلون مراكز خدمة والمراجعين يمثلون الواحدات الطالبة للخدمة ونفس الحال ينطبق على كثير من الامور الحياتية . اما في مجال التكنولوجيا ففي الحاسات الالكترونية فيها ان العمليات المنفذة تعتبر الواحدة الطالبة للخدمة في حين وحدة المعالجة المركزية CPU تمثل مركز الخدمة .

العناصر الرئيسية لانموذج صفوف الانتظار Basic elements of the queuing model

(١). وصول الوحدات Units arrive
يكون الوصول على شكل فترات زمنية منتطمة او غير منتظمة الى

مراكز الخدمة (قنوات) ، مثال على ذلك وصول الشاحنات الى مواقع التحميل ، دخول الزبائن الى مركز تجاري ، وصول السفن الى الميناء وغيرها من التطبيقات .

(٢). مراكز (قنوات) الخدمة Service channels
هي الموقع التي تقوم بتقديم الخدمة للواحدات الواصلة (الطالبة للخدمة) مثال على ذلك ، البائعين في المراكز التجارية ، الميناء . اذا كان مركز الخدمة غير مشغول فان الواحدات سوف تتلقى الخدمة مباشرة دون الانتظار ، اما اذا كانت الخدمة مشغولة فان الوحدة الواصلة عليها الانتظار في صف الانتظار لحين ان يتم تقديم الخدمة لها ومن ثم تغادر النظام .

(٣). الصف Queue
يمقل عدد الوحدات المنتظرة للحصول على الخدمة (الطالبة للخدمة) . علما بأن الصف لايتضمن الوحدة التي يتم تقديم الخدمة لها .

خصائص نماذج صفوف الانتظار Characteristic of Queuing models

(١). توزيع الوصول Arrival distribution: يقصد به نمط او قاعدة وصول الوحدات الى النظام . ممكن ان تكون على شكل فترات زمنية متساوية او غير متساوية بحيث ان وصول هذا الوحدات يكون بشكل عشوائي. بمعنى اخر ان وصول الوحدات ليس له قاعدة معينة او نمط معين . كون زمن وصول الوحدات الى النظام عشوائي فأن استخدام التوزيعات الاحتمالية لوصف معدل الوصول اساسي في هذه الحالة . اكثر التوزيعات استخداما هو توزيع بواسون بمعدل وصول λ.

(٢). توزيع الخدمة Service distribution: هو نمط او قاعدة مغادرة الوحدات للنظام وهي في نفس الوقت وقت الخدمة والتي هي عبارة عن الفترة الزمنية بين خدمتين متتاليتن. هذه الخدمة اما ان تكون ثابتة او عشوائية. يعتبر معدل الخدمة هو عدد الواحدات التي تم تقديم الخدمة لها خلال وحدة الزمن وغالبا وقت الخدمة يتوزع توزيعا عشوائيا حسب التوزيع الاسي

(٣). قنوات الخدمة : Service channels انظمة صفوف الانتظار ممكن ان تحتوي على مركز خدمة واحد ، اي ان وحدة واحدة سوف تتلقى الخدمة وباقي الوحدات في صف الانتظار كما في عيادة طبيب . اما في حالة مراكز خدمة متعددة فان هناك اكثر من وحدة واحدة تتلقى الخدمة حسب اعداد المراكز ، على سبيل المثال محطات التعبئة . وهناك انطمة تحتوي على سلسة من المراكز المتعددة ، التي تمر من خلالها الوحدة، منها هو الحال في صناعة منتوج ما .

(٤). نظام الخدمة Service discipline : هو القاعدة التي يتم بموجبها اختيار الوحدات التي سوف تقدم الخدمة لها. اكثر الانظمة شيوعا هو من ياتي اولا يخدم اولا، $FCFS$ حسب هذه القاعدة فان الوحدات سوف تتلقى الخدمة حسب اسبيقات الوصول كما هو الحال في محطات التعبئة وغيرها من الامثلة. والنظام الثاني هو من ياتي اخيرا يخدم اولا $LCFS$ كما هو الحال في المخازن ، اذ ان اخر وحدة وصلت سوف تكون اول وحدة تتلقى الخدمة. اما النظام الاخير فان الاسبقيات فيه عشوائية .

(٥). عدد الوحدات المسموح بها في النظام Capacity of the system: عدد الوحدات اما ان يكون محدود اي لا يسمح للوحدات الواصلة ان تدخل النظام في حال تجاوز سعة النظام ، مثال على ذلك المخازن اذ لايسمح بتخزين وحدات تتجاوز الطاقة الاستيعابية للمخزن او النظام يكون مفتوح .

(٦). المجتمع Population: ويقصد به المصدر التي تأتي منه الوحدات ، اذا كان المصدر يحتوي على عدد قليل من الوحدات يسمى مجتمع محدود اما اذا كان يحتوي على عدد كبير من الوحدات (اكثر من خمسين وحدة) يطلق عليه مجتمع غير محدود.

ترميز نظام الانتظار Encoding queuing system

ان تحديد الصفات الستة السابقة سوف تساعد في دراسة المشكلة وتحديد النموذج الرياضي الملائم ، حيث ان لكل نموذج من النماذج سوف يتمثل بالرموز التالية $(a/b/c) : (d/e/f)$ بحيث ان كل رمز يشير الى التالي:

(a) توزيع الوصول Arrival distribution : تشير الى توزيع عدد الوحدات الواصلة الى صف الانتظار في وحدة الزمن او بشكل مكافئ توزيع الوقت الواصل بين وصول اي وحدة الى صف الانتظار و الوحدة التي تليها .

(b) توزيع الخدمة Service distribution: يشير الى توزيع عدد الوحدات المغادرة لصف الانتظار في وحدة الزمن او بشكل مكافئ توزيع وقت الخدمة .

(c) عدد قنوات الخدمة Number of service channels: تشير الى عدد مراكز الخدمة المتوازية ويمكن ان تاخذ $c = 1, 2, \cdots, n$

(d) قاعدة الخدمة Service discipline: تشيرالى قاعدة الخدمة المستخدمة والتي تضم : من ياتي اولا يخدم اولا $FCFS$ ، من ياتي اخيرا يخدم اولا $LCFS$، خدمة عشوائية $SIRO$ وقاعدة الخدمة العامة GD.

(e) حالة النظام System capacity : بمكن استخدام اي عدد مناسب اذا كان للنظام طاقة محدودة اما اذا كان للنظام طاقة غير محدودة نستخدم الرمز ∞. عدم ذكر الرمز (e) في النظام يعني انه النظام مفتوح .

(f) مصدر الطلب : بمعنى حجم مجتمع الوحدات والتي يمكن ان يكون

محدود N وغير محدود ∞.

ملاحظات

- الرمزان (a, b) يمكن استبدالهما بالرموز التالية : "M" في حالة ان توزيع معدلات الوصول او الخدمة يتبعان توزيع بواسون $Poisson$ وان ازمنة الوصول او الخدمة يتبعان التوزيع الاسي $Exponential$
- الرمز "D" : تعني ثبات وقت الخدمة او ثبات الوقت الفاصل بين وصول اي وحدة الى صف الانتظار والوحدة التي تليها .
- "E_k" : تعني بان توزيع وقت الخدمة او توزيع الوقت الفاصل بين وصول اي وحدة لصف الانتظار والوحدة التي تليها هو توزيه ايرلنك $Erlang$ وهو حالة خاصة من توزيع كاما عندما تكون k موجبة .
- "GA": تشير الى عمومية توزيع الوحدات الواصلة الى صف الانتظار في وحدة الزمن او بشكل مكافئ عمومية توزيع الوقت الفاصل بين وصول اي وحدة في صف الانتظار والوحدة التي تليها وكذلك عمومية توزيع ازمنة المغادرة .

مثال واجب

اعط وصفا لنماذج صفوف الانتظار التالية:

$$(M/M/1) : (FcFs/N/\infty)$$

$$(M/E_k/3) : (SIRO/20/\infty).$$

مقاييس كفاءة صفوف الانتظار Measures of effectiveness of queuing

لقد انصبت معضم الدراسات الخاصة بصفوف الانتظار قيد الدراسة على تحديد مدى كفاءة او فاعلية .النظام قيد الدراسة . اذ يتم تقييم مدى كفاءة هذا النظام باستخدام مقاييس متعددة والتي كل واحد من هذه المقاييس يؤكد الوجوه المهمة للنظام ويؤدي تحليلها الى الخروج بتوصيات حول اداء النظام قيد الدراسة . في ما يلي المقاييس المستخدمة في تقييم اداء نظام صف الانتظار .

معدل وقت الوصول Arrival time rate يقصد به معدل الوقت اللازم لوصول وحدة واحدة الى صف الانتظار . اذا فرضنا ان عدد الوحدات الواصلة في وحدة الزمن هو λ فان

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0$$

حيث ان كل ما زادت قيمة $\bar{u}$ قل طول صف الانتظار والعكس صحيح .

معدل وقت الخدمة Service time rate يقصد به الوقت الازم لخدمة وحدة واحدة في وحدة الزمن . اذا فرضنا ان μ تمثل عدد المخدومين في وحدة الزمن فأن

$$\bar{y} = \frac{1}{\mu}, \mu > 0$$

. كل ما زادت قيمة $\bar{y}$ قل عدد المخدومين و زاد طول صف الانتظار مما يؤدي الى تقليل كفاءة النظام والعكس صحيح .

كثافة المرور Traffic intensity يطلق عليه احيانا كثافة الخدمة وهي نسبة معدل عدد الوحدات الداخلة الى صف الانتظار الى معدل عدد الوحدات المغادرين خلال وحدة من الزمن . او نسبة معدل وقت الخدمة الى معدل وقت الوصول خلال وحدة الزمن .

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; 0 < \rho < 1$$

او

$$\rho = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\lambda}{\mu}; 0 < \rho < 1.$$

طول صف الانتظار Length of the queue L_q يمثل عدد الوحدات في صف الانتظار (العدد المتوقع للوحدات في صف الانتظار في وقت معين) ويدرس طول صف الانتظار عادة من خلال معرفة التوزيع الاحتمالي له في حالة الاستقرار . اذ يعد من اهم المقاييس المستخدمة لقياس كفاءة النظام لانه بزيادة طول صف الانتظار تقل كفاءة النظام .

طول صف الانتظار في النظام Length of the queue in the system L_s يمثل عدد الوحدات في النظام (الوحدات الموجودة في صف الانتظار مضافا اليها عدد الوحدات الموجودة في قناة الخدمة في وقت معين) . اذ غالبا ما يكون هناك عدد من الوحدات الذين يتلقون الخدمة حتى وان كان صف الانتظار فارغا وبذلك يتأثر النظام . حيث تقل كفاءة النظام بزيادة عدد الوحدات الموجودة في الخدمة ويدرس ايضا من خلال التوزيع الاحتمالي له عند حالة الاستقرار ايضا .

معدل وقت الانتظار في صف الانتظار Mean waiting time in the queue W_q هو الوقت المتوقع لانتظار وحدة واحدة داخل صف الانتظار مستثنى

منه الوقت المستغرق داخل قناة الخدمة (وقت الخدمة) و وقت الانتظار يمثل الوقت المبذول من قبل الوحدات في صف الانتظار الى ان تتم عملية الخدمة لجميع الوحدات . زيادة وقت الانتظار يقلل من كفاءة النظام .

معدل وقت الانتظار في النظام Mean waiting time in the system W_s هو الوقت المتوقع لانتظار وحدة واحدة داخل صف الانتظار مضافا اليه الوقت المستغرق داخل قناة الخدمة . يمكن من خلال تحليل قيمة المتوسط الحصول على قياسات لاداء النظام باستخدام علاقات بسيطة من صيغة لتل $Little$ وهي علاقة تربط بين معدل وقت الانتظار ومعدل طول صف الانتظار

$$L_s = \lambda W_s$$

كذلك تربط بين متوسط عدد الوحدات في صف الانتظار مع متوسط زمن الانتظار في صف الانتظار

$$L_q = \lambda W_q.$$

كما ان الوقت المتوقع للانتظار في النظام يساوي الوقت المتوقع للانتظار في صف الانتظار مصافا اليه الوقت المتوقع في الخدمة (معدل وقت الخدمة)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} * \lambda$$

$$\lambda W_s = \lambda W_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

بواسطة صيغة ليتيل L_s ، W_s، L_q و W_q فأن

$$L_s = L_q + \rho$$

نلاحظ من الصيغ الاربعة اعلاه يربط بعضهما البعض. اذ ان معرفة قيمة احداهما يؤدي الى الى ايجاد القيم الاخرى باستخدام صيغة ليتيل .

حالة النظام State of the system هو عدد الوحدات في النظام بعد فترة زمينة معينة . مثلا اذا كان $P_n(t)$ تمثل احتمال وجود n من الوحدات عند الزمن t فان $P_0(t)$ تمثل احتمال عدم وجود اي وحدة في النظام عند الزمن t والنظام يكون في حالة الاستفرار اذا كان صف الانتظار غير متأثر بعامل الزمن t.اي ان $P_n(t)$ لاتعتمد على الزمن t لذا يرمز لها بالرمز P_n ويكون النظام في حالة الاستقرار عندما

$$P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$$

وان منفعة النظام هي ان الخدمة مشغولة في جزء من الزمن وتساوي $1 - P_0$.

بعض التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في نظرية الطوابير
Some of the probability distributions used in Queueing theory

تعتمد النماذج الرياضية في صفوف الانتظار اعتمادا كليا على التوزيعات الاحتمالية لمعدلات الوصول والخدمة لغرض اجراء الاختبارات الاحصائية ومعرفة دقة تلك التوزيعات . من هذه التوزيعات :

توزيع بواسون Poisson distribution

يقال للمتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ واختصارا يكتب $X \sim P(\lambda)$ اذا كان شكل دالة الكتلة الاحتمالية تكتب بالصيغة الاتية :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; \quad 0, 1, 2, \cdots; \quad \lambda > 0$$

بحيث ان $\sum_{\forall x} f(x) = 1$ لبرهان ذلك لدينا $e^{-\lambda} \in [0, 1], \forall \lambda \geq 0$ فأن

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

بواسطة سلالسل تايلور تايلور Taylor Series لدينا

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \simeq e^{-\lambda}$$

عليه فأن

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) \simeq e^{-\lambda}e^{\lambda} \simeq e^0 \simeq 1.$$

وان المتوسط والتباين Mean & Variance لتوزيع بواسون هو :

$$E[X] = \sum_{\forall x} xf(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x(x-1)!}$$

لذلك

$$E[X] = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

وان

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{x_0}^{\infty} x^2 f(x) - \lambda^2 = \lambda$$

واجب :
برهن ان تباين توزيع بواسون هو λ بالاعتماد على التعبير اعلاه .

يقال للمتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة θ واختصارا يكتب $X \sim EXP(\theta)$ اذا كان شكل دالة الكثافة الاحتمالية تكتب بالصيغة الاتية:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad \forall x > 0$$

وان دالة التوزيع التراكمية هي

$$F(x) = \int_0^x \theta e^{-\theta t} dt = 1 - e^{-\theta x}.$$

عندما $x \to \infty$ فأن

$$\lim_{x\to\infty} = 1 - e^{-\theta\infty} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

وان المتوسط والتباين Mean & Variance للتوزيع الاسي هو :

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \theta x e^{-\theta x} dy$$

باستخدام التكامل بالتجزئة ، نحصل على التالي: افرض ان $u = x$ بالتالي فأن $du = dx$، وافرض ان

$$du = \theta e^{-\theta x}$$

يؤدي الى

$$v = -e^{-\theta x}$$

وعليه

$$E[X] = -x e^{-\theta x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x} dx$$

معلوم ان المقدار $e^{-\theta x}$ يقترب من الصفر قبل x عندما $x \to 0$ عليه فأن المقدار

$$-x e^{-\theta x}|_0^\infty = 0$$

وعليه فان التوقع هو

$$E[X] = \int_0^\infty e^{-\theta x} dx = -\theta^{-1} e^{-\theta x}|_0^\infty = \theta^{-1}$$

والتباين

$$Var(X) = \theta^{-2}.$$

واجب: برهان تباين التوزيع الاسي اعلاه .