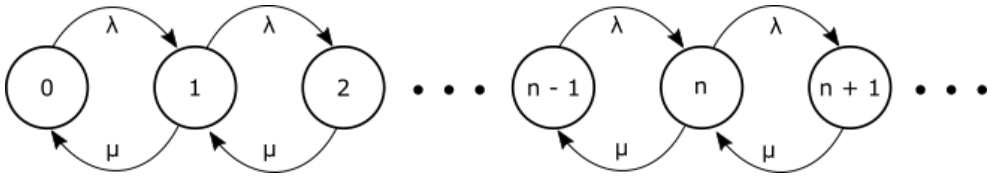
نظرية الطوابير

د. مناف حازم احمد
قسم الاحصاء والمعلوماتية
المرحلة الثالثة
المحاضرة الثانية

انظمة صفوف الانتظار

نظام انتظار احادي الخدمة $(\mu/\mu/1) : (FcFs/\infty/\infty)$

افرض ان الوحدات يوفدون تباعا الى نظام خدمة احادي حسب عملية بواسون بمعدل λ اي بمعنى اخر وجود مقدم خدمة واحد في النظام . وان الاوقات بين وصولين متعاقبين هي متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الاسي ولها متوسط $\frac{1}{\lambda}$. اما اوقات الخدمة المتعاقبة تعتبر متعيرات عشوائية لها توزيع اسي بمتوسط مقداره $\frac{1}{\mu}$. الشكل العام لنظام خدمة احادي ذو قناة خدمة واحدة يمكن توضيحه بالشكل التالي :



صفات نظام الانتظار احادي الخدمة

(١). توزيع معدلات الوصول يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ وان توزيع ازمنة الوصول والفواصل الزمنية بين وصول واخر يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة λ .

(٢). ان توزيع معدلات الخدمة يتبع توزيع بواسون بالمعلمة μ وان وقت الخدمة يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة μ.

(٣). عدد قنوات الخدمة يساوي واحد.

(٤). قاعدة الخدمة المطبقة هي من ياتي اولا يخدم اولا FcFs.

(٥). طاقة النظام (سعة النظام) غير محدودة ∞ .

(٦). معدل الطلب على الخدمة غير محدود ∞ .

توزيع حالة الاستقرار Steady state of the distribution

يقصد بحالة الاستقرار هو السلوك الذي يؤدي بالنظام الى الوصول الى حالة الاتزان وذلك بعد عمل لفترة طويلة ومناسبة من الزمن . اذ يقال ان النظام في حالة استقرار اذا تحققت الغاية التالية :

$$P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t).$$

ولا يتحقق هذا الاستقرار او الاتزان الا من خلال دالة الكثافة الاحتمالية لوقت الوصول و وقت الخدمة Service and arrival time density **مع ملاحظة ان وقت الوصول وقت الخدمة مستقلين وهم دوال اسية . بحيث ان دالة الكثافة الاحتمالية لوقت الوصول يعبر عنها بالصيغة**

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad t > 0$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية لوقت الخدمة هي

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}; \quad t > 0$$

حيث ان : λ **هي معدل وصول الوحدات في وحدة الزمن .**
μ **هي معدل المغادرين من الخدمة في وحدة الزمن .**
مع العلم ان $1/\lambda$ **هو معدل الوقت الفاصل بين وصول وحدتين متعاقبتين وان** $1/\mu$ **هو متوسط الوقت الازم لخدمة وحدة واحدة . لأختبار حالة الاستقرار عن الوصول فأن**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lambda e^{-\infty} = 0 = P_n$$

وكذلك عند المغادرة

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \mu e^{-\infty} = 0 = q_n$$

عليه فأن النظام مستقر .

التوزيع الاحتمالي لنظام الانتظار $(M/M/1)$

لغرض حساب التوزيع الاحتمالي لنظام الانتظار $(M/M/1)$ **يجب تحديد الفرضيات الاساسية من اجل الحصول على المعادلات التفاضلية لهذا النظام وهي :**

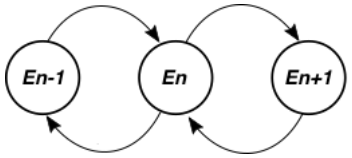
(١). $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$. **احتمال وصول وحدة واحدة على طول الفترة** Δt **هو**

(٢). $O(\Delta t)$. **احتمال وصول اكثر من وحدة واحدة عند الزمن** Δt **هو**

(٣). $\mu\Delta t + O(\Delta t)$. **احتمال اكمال خدمة وحدة واحدة عند الزمن** Δt **هو على افتراض ان النظام غير فارغ .**

(٤). احتمال خدمة اكثر من وحدة واحدة عند الزمن Δt هو $O(\Delta t)$. على افتراض ان النظام غير فارغ .

حيث ان $O(\Delta t)$ تمثل قيمة صغيرة جدا سوف تهمل فيما بعد وان Δt هي مقدار الزيادة في الفترة الزمنية t . يتم ايجاد التوزيع الاحتمالي $P_n(t)$ عند الزمن t. بالاعتماد على المعادلات الفرقية لهذا النظام . اذ يحدد اولا ان النظام يبدأ عند الحالة E_n خلال الفترة الزمنية $(t + \Delta t)$



في حالة $n \geq 1$:
احتمال ان النظام عند الحالة E_n عند الزمن $(t + \Delta t)$ يساوي

- **احتمال ان النظام عند الحالة E_n عند الوقت t ولايوجد اي وصول عند الوقت Δt و لايوجد خدمة عن الوقت Δt او**
- **احتمال ان النظام عند الحالة E_n عند الوقت t ويوجد وحدة واحدة واصلة عند الوقت Δt و وحدة واحدة تتلقى الخدمة عند الزمن Δt او**
- **احتمال ان النظام عند الحالة E_{n+1} عند الزمن t ولايوجد اي وصول عند الزمن Δt ويوجد وحدة واحدة تتلقى الخدمة عند الزمن Δt او**
- **احتمال ان النظام الحالة E_{n-1} عند الزمن t ويوجد وحدة واحدة واصلة عند الزمن Δt ولايوجد اي وحدة تتلقى الخدمة عند الزمن Δt**

يمكن التعبير عنها بالصيغة الرياضية كالاتي :

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) =& P_n(t).Pr\{A\}.Pr\{B\} + P_n(t).Pr\{C\}.Pr\{D\} \\ &+ P_{n+1}(t).Pr\{E\}.Pr\{A\} \\ &+ P_{n-1}(t).Pr\{C\}.Pt\{F\} + O(\Delta t); \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

حيث ان الاحداث التالية تمثل :
(A) عدم وصول اي وحدة عند الزمن Δt.
(B) عدم وجود خدمة عند الزمن Δt.
(C) وصول وحدة واحدة عند الزمن Δt.
(D) وحدة واحدة مخدومة عند الزمن Δt.
(E) وحدة واحدة اكملت لها الخدمة عند الزمن Δt.
(F) لايوجد اية وحدة اكملت لها الخدمة عند الزمن Δt.

بالاعتماد على الفرضيات اعلاه وبالاعتماد على العلاقة بين احتمالية الفشل والنجاح $p = 1 - q$ حيث ان p و q تمثل احتمالية النجاح والفشل على

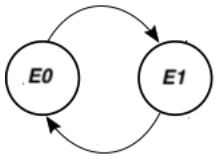
التوالي ، عليه يمكن كتابة المعادلة اعلاه كالتالي :

$$\begin{aligned}P_n(t+\Delta t) =&P_n(t)[1-\lambda\Delta t-O(\Delta t)][1-\mu\Delta t-O(\Delta t)]\\&+P_n(t)[\lambda\Delta t+O(\Delta t)][\mu\Delta t+O(\Delta t)]\\&+P_{n+1}(t)[\mu\Delta t+O(\Delta t)][1-\lambda\Delta t-O(\Delta t)]\\&+P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t+O(\Delta t)][1-\mu\Delta t-O(\Delta t)]\\&+O(t)\end{aligned}$$

بعد التبسيط للمعادلة اعلاه علما بأن $O^2(\Delta t)$ سوف تهمل كونها اقل قيمة من $O(\Delta t)$. وبهذا تصبح المعادلة اعلاه كما يلي :

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t]+P_{n+1}(t)[\mu\Delta t]+P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t]+O(\Delta t); \quad n \geq 1$$

عندما $n = 0$ يعني ان النظام عند الحالة E_0 في الوقت $(t + \Delta t)$. اذا كانت الحالة عند الزمن t ولم يكن هناك اي وصول خلال الفترة Δt يعني ان الخدمة تكون مستحيلة بسبب ان النظام يكون فارغ او ان النظام يكون عند الحالة E_1 عند الزمن t ولايوجد وصول وان خدمة واحدة يتم اكمالها في الوقت Δt .



وعليه فأن احتمال عدم وصول اي وحدة خلال الفترة $(t + \Delta t)$ هو

$$\begin{aligned}P_0(t+\Delta t) =&P_0(t)[1-\lambda\Delta t-O(\Delta t)]+P_1(t)[1-\lambda\Delta t-O(\Delta t)][\mu\Delta t\\&+O(\Delta t)]+O(\Delta t)\\=&P_0(t)[1-\lambda\Delta t]+P_1(t)[1-\lambda\Delta t][\mu\Delta t]+O(\Delta t)\end{aligned}$$

بما انه لايوجد وصول عند الحالة E_1 كما ذكرنا في الفقرة اعلاه فأن المقدار

$$P_1(t)[1-\lambda\Delta t][\mu\Delta t] = P_1(t)\mu\Delta t$$

كون ان عدد الواصلين $\lambda = 0$ في حالة E_1.وعليه فأن المعادلات الفرقية للنظام سوف تكون

$$\begin{aligned}P_n(t+\Delta t) =&P_n(t)[1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t]+\mu\Delta tP_{n+1}(t)+\lambda\Delta tP_{n-1}(t)+O(\Delta t)\\P_0(t+\Delta t) =&P_0(t)[1-\lambda\Delta t]+\mu\Delta tP_1(t)+O(\Delta t)\end{aligned}$$

يمكن كتابة المعادلات اعلاه بالصيغة التالية

$$\begin{aligned}P_n(t+\Delta t)-P_n(t) =&-(\lambda+\mu)\Delta tP_n(t)+\mu\Delta tP_{n+1}(t)+\lambda\Delta tP_{n-1}(t)+O(\Delta t)\\P_0(t+\Delta t)-P_0(t) =&-\lambda\Delta tP_0(t)+\mu\Delta tP_1(t)+O(\Delta t)\end{aligned}$$

بالقسمة على Δt واخذ الغاية للمعادلات اعلاه عندما $\Delta t \to 0$ نحصل على

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = P_n'(t) = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t); \quad n \geq 1$$
$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = P_0'(t) = \lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \quad n = 0.$$

لغرض حل المعادلات يجب ان يكون النظام في حالة الاستقرار ولايتحقق ذلك الا عندما $t \to \infty$ وعليه فأن $P_n'(t) = 0$ لجميع قيم n.

$$0 = -(\lambda+\mu)P_n + \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}; \quad n \geq 1$$
$$0 = \lambda P_0 + \mu P_1; \quad n = 0.$$

بالقسمة على μ نحصل على

$$0 = -\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}P_n + P_{n+1} + \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}; \quad n \geq 1$$
$$0 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 + P_1; \quad n = 0.$$

وعليه فأن :

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}P_n - \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}; \quad n \geq 1$$
$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0; \quad n = 0.$$

او

$$P_{n+1} = (\rho+1)P_n - \rho P_{n-1}; \quad n \geq 1$$
$$P_1 = \rho P_0; \quad n = 0.$$

عندما كثافة المرور $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.