نظرية الطوابير

د. مناف حازم احمد
قسم الاحصاء والمعلوماتية
المرحلة الثالثة
المحاضرة الثالثة

انظمة صفوف الانتظار

نظام انتظار احادي الخدمة $(\mu/\mu/1):(FcFs/\infty/\infty)$

حساب توزيع P_n **(احتمال وجود** n **من الوحدات في النظام)**

لفرض احتساب توزيع P_n **هنالك طريقتان : الطريقة الاولى هي الطريقة التكرارية والتي تعتمد على تكرار كل معادلات الاستقرار السابقة في استخراج توزيع** P_n **او طريقة الدالة المولدة للعزوم . في هذه الدراسة سوف يتم اعتماد الطريقة الاولى :**

$$P_{n+1}=\frac{\mu+\lambda}{\mu}P_n-\frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}$$

$$P_2=\frac{\mu+\lambda}{\mu}P_1-\frac{\lambda}{\mu}P_0;\quad P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0$$

$$\begin{aligned}P_2=&\frac{\mu+\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)P_0-\frac{\lambda}{\mu}P_0=\frac{\lambda}{\mu}P_0\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}-1\right)=\frac{\lambda}{\mu}P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\mu}{\mu}-1\right)\\=&\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2P_0\end{aligned}$$

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0;\quad P_2=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2P_0;\cdots;P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^nP_0$$

$$\begin{aligned}P_{n+1}=&\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^nP_0-\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}P_0\\=&\left[\frac{\lambda^{n+1}+\mu\lambda^n}{\mu^{n+1}}-(\frac{\lambda}{\mu})^2\right]P_0\\=&\frac{\lambda^{n+1}+\mu\lambda^n-\mu\lambda^n}{\mu^{n+1}}P_0\\=&\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}P_0\end{aligned}$$

او

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

بما ان P_n هي دالة احتمالية وتحقق الشرط $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ وان $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ فأن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1$$

وبالتالي

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}$$

عندما $\rho < 1$ فأن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho$$

وعليه فأن توزيع الانتظار في حالة الاستقرار هو

$$P_n = \rho^n(1-\rho), \quad 0 < \rho < 1$$

.

المؤشرات الهامة لنظام الانتظار $(\mu/\mu/1) : (FcFs/\infty/\infty)$ تحت حالة الاستقرار

هناك بعض المؤشرات التي تحدد مدى كفاءة وفاعلية اي نظام انتظار في حالة الاستقرار منها :

(١). عدد الوحدات المتوقعة في النظام L_s

اذا كان n متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات في النظام . فأن عدد الوحدات المتوقعة في النظام وتشمل عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار وعدد الوحدات التي تتلقى الخدمة والذي يرمز لها بالرمز L_s هو

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

البرهان : اذا كان n متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات في النظام فأن

$$L_s = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n$$
$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots = \rho[1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots]$$
$$= \rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$
$$= \rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$$

لدينا ايضا بواسطة سلاسل تايلور

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

عليه فأن

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

وبالتالي

$$L_s = E[n] = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(٢). عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار L_q
اذا كان n_q متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات في صف الانتظار. فأن عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار و يرمز لها بالرمز L_q هي

$$
\begin{aligned}
L_q = E[n_q] =& 0P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\
=& L_s - (1-P_0); \quad P_o = (1-\rho) \\
=& \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \\
=& \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \\
=& L_s - \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}
$$

(١) $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

ملاحظة : تم احتساب عدد الوحدات في صف الانتظار انه $(n-1)$ على فرض انه هناك وحدة واحدة تتلقى الخدمة وحسب النظام كونه قناة خدمة واحدة .

(٣). توقع حجم الانتظار في الصف الغير فارغ L'_q

$$L'_q = E[n_q | n_q \neq 0] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P'_n$$

ان القيمة المتوقعة في الصف الغير فارغ تساوي القيمة المتوقعة لعدد الوحدات في النظام مقسومة على احتمال كون الصف غير فارغ . حيث ان P'_n تمثل التوزيع الاحتمالي الشرطي الى n من الوحدات في النظام . اذ ان

$$P'_n = Pr\big(n \quad in \quad system | n \geq 2\big) = \frac{Pr\big(n \quad in \quad system\big)}{Pr\big(n \geq 2\big)} = \frac{P_n}{\sum_{m=2}^{\infty} P_n}, n \geq 2$$

بالتالي

$$P'_n = \frac{P_n}{1-P_0-P_1} = \frac{P_n}{1-(1-\rho-\rho(1-\rho))} = \frac{P_n}{1-1+\rho-\rho+\rho^2} = \frac{P_n}{\rho^2}$$

هذا يدل على ان التوزيع الاحتمالي الشرطي P'_n هو توزيع احتمالي لـ

P_n فيما عدا الحالات عندما تكون $n = 0, 1$ وعليه فأن :

$$\begin{aligned}
L'_q = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{P_n}{\rho^2} =& \frac{\sum_{n=2}^{\infty} nP_n - \sum_{n=2}^{\infty} P_n}{\rho^2} \\
=& \frac{L_s - P_1 - (1 - P_0 - P_1)}{\rho^2} \\
=& \frac{L_s - 1 + P_0}{\rho^2} \\
=& \frac{L_s - 1 + (1 - \rho)}{\rho^2} \\
=& \frac{L_s - \rho}{\rho^2} \\
=& \frac{\frac{\rho}{1-\rho} - \rho}{\rho^2} \\
=& \frac{1}{1 - \rho} \\
=& \frac{\mu}{\mu - \lambda}
\end{aligned}$$