نظرية الطوابير

د. مناف حازم احمد
قسم الاحصاء والمعلوماتية
المرحلة الثالثة
المحاضرة الرابعة

توزيع وقت الانتظار للنظام $(\mu/\mu/1) : (FcFs/\infty/\infty)$

يتم حساب توزيع وقت الانتظار بالاعتماد على نوعية حالة الانتظار اذا كان في النظام او الصف :

توزيع وقت الانتظار في الصف Waiting time distribution in queue

ليكن المتغير العشوائي T_q **يمثل وقت الانتظار في الصف ولتكن** $W_q(t)$ **دالة التوزيع التجميعي للمتغير** t **فأن هناك حالتان يمكن ان تحدث وهما :**

(١). اذا لم تجد الوحدة الواصلة اي وحدة سبقتها في النظام (اي ان النظام في حالة الصفر) عليه فأن

$$\begin{aligned} W_q(t) =& Pr\{T_q \leq 0\} = Pr\{T_q = 0\} \\ =& Pr\{System \quad is \quad empty\} \\ =& P_0 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$W_q(0) = P_0 = 1 - \rho, \quad t = 0$$

(٢). اذا وجدت الوحدة الواصلة للنظام n **من الوحدات الواصلة قبلها، اي ان النظام في حالة** n **وان دالة التوزيع الاحتمالي التجميعية** $W_q(t)$ **عندما** $t > 0$ **فأن**

$$W_q(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t > 0$$

عليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية لوقت الانتظار في صف الانتظار هي

$$W_q(t) = \begin{cases} 1 - \rho & t = 0; \\ 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t} & t > 0. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} W_q(t) = w_q(t) = \begin{cases} 0 & t = 0; \\ \rho\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} & t > 0. \end{cases}$$

عليه فأن وقت الانتظار المتوقع هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

البرهان

$$\begin{aligned} W_q = E[T_q] &= \int_0^\infty t w_q(t) dt \\ &= 0 w_q(0) + \int_0^\infty t w_q(t) dt \\ &= \int_0^\infty t \frac{\lambda}{\mu}(\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)t} dt \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \int_0^\infty t(\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)t} dt \end{aligned}$$

باستخدام التكامل بالتجزئة افرض ان

$$u = t \Longrightarrow du = dt$$

$$dv = (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)t} dt$$

$$\begin{aligned} v &= \int (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)t} dt \\ &= - e^{-(\mu-\lambda)t} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} W_q = E[T_q] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(- t e^{-(\mu-\lambda)t}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)t} dt \right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\left(0 + \frac{-1}{(\mu-\lambda)} e^{-(\mu-\lambda)t}|_0^\infty \right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{(\mu-\lambda)} \right) \end{aligned}$$

توزيع وقت الانتظار في النظام Waiting time distribution in system

اذا فرضنا ان قاعدة الخدمة هي FcFs **وان** T **تمثل الوقت اللازم للوحدة الواصلة تواً للانتظار في النظام . اذا وجدت هذه الوحدة الواصلة** n **من الوحدات التي سبقتها في النظام، فأنه بالاستناد الى قاعدة الخدمة سيكون**

$$T = t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1}$$

حيث ان

t_1، تمثل الوقت اللازم للوحدة الموجودة اصلاً في الخدمة

$(t_2 \cdots t_n)$ ، تمثل الوقت اللازم لخدمة $n-1$ من الوحدات الموجودة في صف الانتظار .

t_{n+1} ، تمثل الوقت اللازم لخدمة الوحدة التي وصلت تواً.

عليه فأن دالة التوزيع التجميعية لوقت الانتظار في النظام هي :

$$W(t) = Pr\big(T \leq t\big) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t > 0$$

وان توقع وقت الانتظار في النظام هو

$$W_s = E[T] = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

العلاقة بين طول صف الانتظار وتوقع وقت الانتظار

(١). توقع وقت الانتظار في النظام W_s وتوقع وقت الانتظار في الصف W_q

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

(٢). توقع عدد الوحدات في النظام L_s وتوقع وقت الانتظار في النظام W_s هو

$$L_s = \lambda W_s$$

(٣). توقع عدد الوحدات في الصف L_q وتوقع وقت الانتظار في الصف W_q هو

$$L_q = \lambda W_q$$

(٤).

$$L_s = L_q + \rho$$

او

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$$

(٥).

$$L_s = \mu W_q$$

(٦).

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

امتحان يومي

السؤال الاول :

في ورشة تصليح اجهزة كهربائية تصل وحدة واحدة عاطلة كل (6) دقائق وتحتاج كل وحدة الى زمن تصليح بمعدل (4) دقائق . فأذا علمت ان توزيع الوصول و الخدمة يتبعان توزيع بواسون . المطلوب :ـ

(١). ماهو توقع عدد الاجهزة في الورشة ؟

(٢). ماهو توقع عدد الاجهزة التي تنتظر التصليح ؟

(٣). ماهو توقع وقت انتظار الاجهزة في الورشة ؟

(٤). ماهو توقع وقت انتظار الاجهرة التي تنتظر التصليح ؟

(٥). ماهو احتمال ان الجهاز الواصل الى الورشة سوف ينتظر اكثر من (10) دقائق قبل التصليح ؟

(٦). ماهي نسبة الوقت الضائع ؟

(٧). ماهو احتمال وجود (3) اجزة عاطلة في الورشة ؟

السؤال الثاني :

اذا كان معدل اداء الخدمة في احد المطارات هو μ في الساعة وان معدل الوقت الفاصل بين وصول طائرة واخرى تليها هو λ في الساعة . فأذا علمت ان عملية الانتظار تخصع للنموذج $(\mu, \mu, 1)$ وان الكلفة التي يتحملها المطار نتيجة انتظار الطائرة الواحدة يبلغ C_1 دولار في الساعة وان كلفة اداء الخدمة والضيافة و التشغيل هي μC_2 في الساعة . المطلوب : حدد معدل الخدمة الذي يجعل الكلفة المتوقعة اقل ما يمكن .