نظرية الطوابير

د. مناف حازم احمد
قسم الاحصاء والمعلوماتية
المرحلة الثالثة
المحاضرة الخامسة

انظمة صفوف الانتظار

نظام صف الانتظار المحدود $(\mu/\mu/1) : (GD/N/\infty)$

يستخدم هذا النوع من الانظمة كثيرا في الحياة العملية كون اغلب الانظمة محدودة السعة كعيادة طبيب او محل بقناة خدمة واحدة وغيرها. يختلف هذا النظام عن السابق في محدودية استيعاب النظام فقط بعدد محدود من الوحدات وليكن N . اي ان عدد الوحدات التي يستوعبها صف الانتظار في النظام هو $N-1$ و وحدة واحدة في الخدمة . اذ ان اي وحدة جديدة واصلة سوف يتم رفضها، اي لايسمح لها بالدخول الى النظام هذه العملية تؤثر على نسبة الوصول. بناءا على ذلك فأن نسبة الوصول للوحدات التي تنظم فعلا لنظام الانتظار المحدود هي λ_c وتكون نسبة الوصول للوحدات اقل من نسبة الوصول للنظام العام . اي ان

$$\lambda_c = \lambda(1 - P_N)$$

حيث ان : P_N تمثل احتمال فقدان الوحدة من النظام اي انه احتمال ان تطلب الوحدة الخدمة فلا تجد لها مكان في النظام . اذ انه سوف يتم تحديد احتمالات حالات الثبات بالاعتماد على قاعدة الخدمة العامة . اذ ان الفروق في المعالات التفاضلية ل $n = 0$ و $0 < n < N$ هي نفسها في النظام السابق .

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) =& P_n(t)[1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t]+\mu\Delta t P_{n+1}(t)+\lambda\Delta t P_{n-1}(t)+O(\Delta t), \quad 0<n<N \\ P_0(t+\Delta t) =& P_0(t)[1-\lambda\Delta t]+\mu\Delta t P_1(t)+O(\Delta t), \quad n=0 \end{aligned}$$

اما في حالة $n = N$ فأن معدالة الفروق سوف تكون كالتالي :

$$P_N(t+\Delta t) = P_N(t)[1-\mu\Delta t]+P_{N-1}(t)[\lambda\Delta t+(1-\mu\Delta t)]+O(\Delta t), \quad n=N$$

بتباع نفس الاسلوب السابق لنظام صف الانتظار العام في خالة الاستقرار ايضا نحصل على

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (\frac{\lambda-\mu}{\mu})P_n - (\frac{\lambda}{\mu})P_{n-1}; \quad 0 < n < N \\ P_1 &= (\frac{\lambda}{\mu})P_0; \quad n = 0 \\ P_N &= (\frac{\lambda}{\mu})P_{N-1}; \quad n = N \end{aligned}$$

حساب توزيع P_n

بأستخدام نفس الاسلوب السابق نجد ان

$$P_n = \rho^n P_0$$

حيث ان $n = 0, 1, 2, \cdots, N$ وبما ان مجموع الاحتمالات يساوي واحد فأن

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{N} \rho^n = 1$$

سلسلة هندسية محدودة . لغرض تحديد قيمة P_0 ، هناك حالتان

الحالة الاولى : اذا $\rho = 1$ فأن

$$\begin{aligned} P_0 \sum_{n=0}^{N} \rho^n &= 1 \\ P_0 \sum_{n=0}^{N} 1^n &= 1 \\ P_0(N+1) &= 1 \\ P_0 &= \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

الحالة الثانية : اذا $\rho \neq 1$ فأن

$$\begin{aligned} P_0 \sum_{n=0}^{N} \rho^n &= 1 \\ P_0 \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} &= 1 \\ P_0 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \end{aligned}$$

عليه فأن احتمالات الحالة المستقرة لهذا النظام او التوزيع الاحتمالي هو

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^n & \rho \neq 1; \\ \frac{1}{N+1} & \rho = 1. \end{cases}$$

بعض الموشرات الهامة للنظام

(١). عدد الوحدات المتوقعة غي النظام L_s
لدينا في حالة $\rho \neq 1$

$$L_s = E[n] = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n\rho^n$$

لدينا

$$\sum_{n=0}^{N} n\rho^n = \rho \sum_{n=1}^{N} n\rho^{n-1} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{N} \rho^n$$

عليه

$$\begin{aligned} L_s =& E[n] = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{N} \rho^n \\ =& \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \right) \\ =& \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \left[\frac{-(N+1)\rho^N(1-\rho) + 1 - \rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} \right] \\ =& \frac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}; \quad \rho \neq 1 \end{aligned}$$

في حالة $\rho = 1$

$$L_s = E[n] = \sum_{n=0}^{N} n \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N}{2}$$

$$L_s = \begin{cases} \frac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} & \rho \neq 1; \\ \frac{N}{2} & \rho = 1. \end{cases}$$

ولغرض تحديد باقي مؤشرات النظام ، يجب تحديد نسبة الوصول المؤثرة التي تنظم فعلا الى نظام الانتظار λ_c حيث ان $\lambda_c = \lambda(1 - P_N)$

(٢). عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار L_q هي

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_c}{\mu} = L_s - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

(٣). وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار W_q

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_c} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)}$$

(٤). وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام W_s

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_c} = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}$$

او

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$