امتحان يومي

السؤال الاول :

في ورشة تصليح اجهزة كهربائية تصل وحدة واحدة عاطلة كل (6) دقائق وتحتاج كل وحدة الى زمن تصليح بمعدل (4) دقائق . فأذا علمت ان توزيع الوصول و الخدمة يتبعان توزيع بواسون . المطلوب :-

(١). ماهو توقع عدد الاجهزة في الورشة ؟

(٢). ماهو توقع عدد الاجهزة التي تنتظر التصليح ؟

(٣). ماهو توقع وقت انتظار الاجهزة في الورشة ؟

(٤). ماهو توقع وقت انتظار الاجهرة التي تنتظر التصليح ؟

(٥). ماهو احتمال ان الجهاز الواصل الى الورشة سوف ينتظر اكثر من (10) دقائق قبل التصليح ؟

(٦). ماهي نسبة الوقت الضائع ؟

(٧). ماهو احتمال وجود (3) اجزة عاطلة في الورشة ؟

الحل :

قبل البدء بالحل يجب حساب معدل زمن الوصول ومعدل زمن المغادرة وكذك كثافة المرور . بما انه وحدة الزمن بالدقائق لجميع المعطيات ، فأننا ليس بحاجة الى توحيد الوحدات لانه موحدة بالاصل . عليه فأن معدل زمن الوصول هو

$$\lambda = \frac{1}{6} = 0.167$$

وحدة لكل دقيقة . وان معدل زمن المغادرة هو

$$\mu = \frac{1}{4} = 0.250$$

وحدة لكل دقيقة. وان كثافة المرور هي

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.167}{0.250} = 0.67$$

وحدة لكل دقيقة.

(١). توقع عدد الاجهزة في الورشة يحسب يحسب بقانون L_s هو :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.167}{0.250 - 0.167} \approx 2$$

وحدة

(٢). توقع عدد الاجهزة التي تنتظر التصليح يحسب بقانون L_q :

$$L_q = \lambda W_q = \lambda \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0.167^2}{0.25(0.25 - 0.167)} = 1.33$$

وحدة

(٣). لايجاد توقع وقت انتظار الاجهزة في الورشة W_s لدينا القانون التالي

$$L_s = \lambda W_s$$

عليه فأن

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{2}{0.167} = 12$$

دقيقة

(٤). توقع وقت انتظار الاجهزة التي تنتظر التصليح W_q هو :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{L_s}{\mu} = \frac{2}{0.25} = 8$$

دقيقة

(٥). يتم حساب احتمالية انه الاجهزة تنتظر اكثر من 10 دقائق باحدى الطريقتان اما :

$$\begin{aligned} Pr\big(T_q > 10\big) &= \int_{10}^{\infty} w_q(t)dt \\ &= \int_{10}^{\infty} \rho(\mu - \lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt \\ &= -\rho e^{-(\mu-\lambda)t}|_{10}^{\infty} \\ &= \rho e^{-(\mu-\lambda)10} \\ &= 0.67e^{-0.250-0.167)10} \\ &= 0.229 \end{aligned}$$

او

$$\begin{aligned} Pr\big(T_q > 10\big) &= 1 - Pr\big(T_q \leq 10\big) \\ &= 1 - W_q(10) \\ &= 1 - 1 + \rho e^{-\mu(1-\rho)10} \\ &= 0.67e^{-0.25(1-0.67)10} \\ &= 0.294 \end{aligned}$$

(٦). نسبة الوقت الضائع هو احتمالية انه النظام فارغ

$$P_0 = (1 - \rho) = 1 - 0.67 = 0.33$$

(٧). احتمال وجود 3 اجهزة هو

$$P_3 = \rho^3(1 - \rho) = 0.67^3(0.33) = 0.099$$

السؤال الثاني :

اذا كان معدل اداء الخدمة في احد المطارات هو μ في الساعة وان معدل الوقت الفاصل بين وصول طائرة واخرى تليها هو λ في الساعة . فأذا علمت ان عملية الانتظار تخضع للنموذج $(\mu, \mu, 1)$ وان الكلفة التي يتحملها المطار نتيجة انتظار الطائرة الواحدة يبلغ C_1 دولار في الساعة وان كلفة اداء الخدمة والضيافة و التشغيل هي μC_2 في الساعة . المطلوب : حدد معدل الخدمة الذي يجعل الكلفة المتوقعة اقل ما يمكن .

الحل :
يحب ان تحدد عدد الطائرات الكلية في المطار لكي يتم تحديد الكلفة لهذه الطائرات C_1

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

عليه فأن اوزان الكفلة لعدد الطائرات في المطار هو $L_s C_1$. الكلفة الكلية هي كلفة انتظار الطائرات $L_s C_1$ مضافا اليها كلفة اداء الخدمة والضيافة والتشغيل μC_2

$$\begin{aligned} C =& L_s C_1 + \mu C_2 \\ =& \frac{\lambda}{\mu - \lambda} C_1 + \mu C_2 \end{aligned}$$

للحصول على معدل خدمة الذي يجعل الكلفة اقل ما يمكن هو هن طريق اشتقاق الكلفة بالنسبة الى μ ومساواتها بالصفر لكي يتم تحديد قيمة μ التي تجعل C اقل ما يمكن .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} C =& -\lambda C_1 (\mu - \lambda)^{-2} + C_2 = 0 \\ (\mu - \lambda)^2 =& \frac{\lambda C_1}{C_2} \\ \mu - \lambda =& \pm \sqrt{\frac{\lambda C_1}{C_2}} \end{aligned}$$

بالتالي

$$\mu = \lambda \pm \sqrt{\frac{\lambda C_1}{C_2}}$$

لكي يتم تحديد قيمة μ التي تجعل الكلفة اقل ما يمكن ، نشتق مرة ثانية بحيث

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu} C = \frac{2\lambda C_1}{(\mu - \lambda)^3}$$

بالتعويض في قيمة μ في المعادلة السابقة، فأن

$$\frac{2\lambda C_1}{(\mu - \lambda)^{3/2}} > 0$$

اذا

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda C_1}{C_2}}$$

$$\frac{-2\lambda C_1}{(\mu - \lambda)^{3/2}} < 0$$

اذا

$$\mu = \lambda - \sqrt{\frac{\lambda C_1}{C_2}}$$

اذ ان معدل الخدمة المتوقعة الذي يجعل الكلفة اقل ما يمكن هو $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda C_1}{C_2}}$