نظرية الطوابير

د. مناف حازم احمد
قسم الاحصاء والمعلوماتية
المرحلة الثالثة
المحاضرة السابعة

انظمة صفوف الانتظار

نموذج صف الانتظار بمراكز اداء خدمة متعددة وسعة نظام محدودة $(\mu/\mu/C) : (GD/N/\infty)$

هذا النظام لا يختلف عن النظام السابق (النموذج الثالث) سوى ان عدد الوحدات التي تقدم لها الخدمة يكون محدودا ومقدرا بعدد وليكن N. اي ان طاقة النظام تكون محدودة واقل من NC. بواسطة القوانين ادناه يمكننا حل اي مسألة طوابير تتبع النموذج الرابع.

التوزيع الاحتمالي للنظام

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!}\right) P_0, & 0 \leq n < C \\ \\ \left(\frac{\rho^n}{C!C^{n-c}}\right) P_0 & C \leq n \leq N.. \end{cases}$$

حيث ان $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ و

$$P_0 = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!} \frac{1-(\rho/C)^{N-C+1}}{1-(\rho/C)} \right)^{-1}, & (\rho/C) \neq 1 \\ \left(\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!}(N-C+1) \right)^{-1}, & (\rho/C) = 1. \end{cases}$$

عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار L_q

$$L_q = \frac{\rho^C(\rho/C)}{C!(1-(\rho/C))^2}\left[1-(\rho/C)^{N-C+1}-(1-(\rho/C))(N-C+1)(\rho/C)^{N-C}\right]P$$

عدد الوحدات المتوقعة في النظام L_s

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu},$$
$$\lambda_e = \lambda(1-P_N)$$

وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار W_q

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

وقت الانتظار المتوقع في النظام W_s

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

مثال

يقوم احد المصارف بتقديم خدماته الى العملاء وانهاء معاملاتهم عند امناء الصندوق . وقد وجد ان المصرف يحتوي على 4 امناء صناديق، ويصل الزبائن الى المصرف بمعدل 45 زبون في الساعة طبقا لتوزيع بواسون وان القاعة المخصصة لانتظار الزبائن داخل المصرف لا تتسع لاكثر من 10 اشخاص. ووجد ان زمن الخدمة للزبون الواحد تتبع التوزيع الاسي بمعدل 4 دقائق لكل زبون. حدد نوع النظام الملائم لهذا النموذج مع حساب ما يلي:

(١). احتمال ان يكون المصرف خالي من الزبائن.

(٢). احتمال وجود زبون واحد او زبونين او ستة زبائن في المصرف.

(٣). احتمال وصول زبون ولا يجد مجال للدخول.

(٤). عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار.

(٥). عدد الزبائن المتوقع في المصرف.

(٦). وقت الانتظار المتوقع في الصف.

(٧). وقت الانتظار المتوقع في المصرف.

الحل :

عدد قنوات الخدمة ، $C = 4$ **سعة النظام ،** $N = 10$ **،** $\lambda = 45$ **زبون في الساعة ،** $\mu = \frac{60}{4} = 15$ **زبون في الساعة ،** $\rho = \frac{45}{15} = 3$.

(١). احتمال ان يكون المصرف خالي من الزبائن.

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!} \frac{1-(\rho/C)^{N-C+1}}{1-(\rho/C)} \right)^{-1}, \quad (\rho/C) \neq 1$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{4-1} \frac{3^n}{n!} + \frac{3^4}{4!} \frac{1-(3/4)^{10-4+1}}{1-(3/4)} \right)^{-1} = 0.0404$$

(٢). احتمال وجود زبون واحد او زبونين او ستة زبائن في المصرف.

$$P_{\{n=1,n=2,n=6\}} = P_1+P_2+P_6 = \left(\frac{3^1}{1!}\right)0.0404+\left(\frac{3^2}{2!}\right)0.0404+\left(\frac{3^6}{4!4^{6-4}}\right)0.0404$$

(٣). احتمال وصول زبون ولا يجد مجال للدخول.

$$P_{10} = \left(\frac{3^{10}}{4!4^{10-4}}\right)0.0404 = 0.0242$$

(٤). عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار.

$$L_q = \frac{3^4(3/4)}{4!(1-(3/4))^2}\left[1-(3/4)^{10-4+1}-(1-(3/4))(10-4+1)(3/4)^{10-4}\right]0.0404 =$$

(٥). عدد الزبائن المتوقع في المصرف.

$$\lambda_e = \lambda(1-P_{10}) = 45(1-0.0242) = 43.911$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = 0.9080 + \frac{43.911}{15} = 3.8354 \approx 4$$

(٦). وقت الانتظار المتوقع في الصف.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{0.9080}{43.911} = 0.0206$$

(٧). وقت الانتظار المتوقع في المصرف.

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0206 + \frac{1}{15} = 0.0872$$