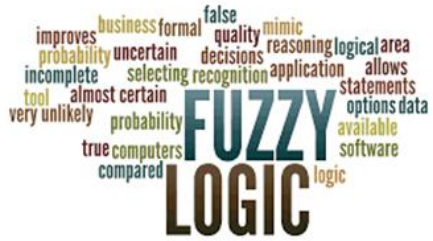
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات
المرحلة الثالث/ المحاضرة الأولى



Fuzzy Mathematics الرياضيات الضبابية

أ.د.عمر صابر قاسم م. د.فاطمة محمود حسن

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

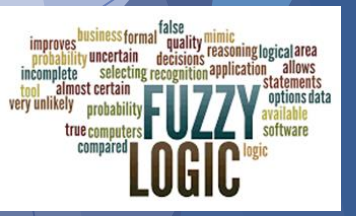
قسم الرياضيات

2024-2025

Fuzzy Mathematics الرياضيات الضبابية

إ ن نظرتنا إلى العالم الحقيقي، تتخللها مفاهيم ليس لها حدود محددة بشكل واضح على سبيل المثال، كثير، طويل القامة، شاب، يافع، ساخن، بارد، إلخ. هي صحيحة فقط إلى حد ما، وهي خاطئة كذلك إلى حد ما، هذه المفاهيم (الحقائق) يمكن أن تسمى مفاهيم غامضة، أو رمادية (ضبابية)

يقدم المنطق المضبب (Fuzzy logic) الاطار العام لحل مشكلة تمثيل المعلومات التقريبية او غير المحددة تماما اللازمة لاستخدام هذه المعلومات
حقق المنطق الضبابي تطورات كبيرة في شتى مجالات التطبيقات وقد استخدمت مفاهيمه في بناء اول فرن لصناعة الاسمنت في الدنمارك عام ١٩٧٥ ومالبثت ان تبعتها منتجات عدة تتراوح بين الات الغسيل والات التصوير فمكيفات الهواء الصناعية والمضخات وكان لها تطبيقات مثلى في بناء الانظمية الخبيرة خاصة الطبية



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

الرياضيات الضبابية Fuzzy Mathematics

- مقدمة عامة عن المنطق الضبابي
- الفرق بين المنطق الكالسيكي والمنطق الضبابي
- الدالة المثلثية ودالة شبه المنحرف ودالة كاوس(تمثيل دوال الأنتماء)
- العمليات على المجموعات الضبابية
- خصائص المجموعات الضبابية
- العلاقة الضبابية Relation Fuzzy
- طرائق تمثيل العلاقات الضبابية
- العمليات على المصفوفات
- خصائص العلاقات الضبابية
- تركيب العلاقة في قطع-α cut
- التوسيع االسطواني Extension C

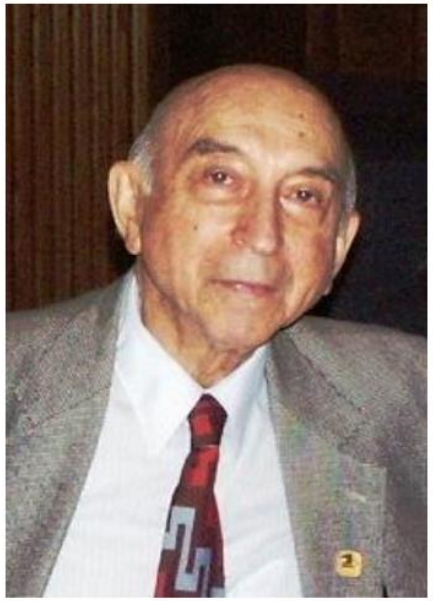
المنطق الضبابي Fuzzy Logic

يسمى أيضا ا(لمنطق المبهم) و (المنطق الترجيحي) وهو امتداد للمنطق المتعارف علية (المنطق التقليدي) ثنائي القيم وتعميم له بهدف اتخاذ قرارات افضل في حالات عدم اليقين .

ظهر مصطلح المنطق الضبابي ضمن النظرية التي صاغها عالم الكومبيوتر والمهندس الكهربائي الاذربيجاني لطفي زاده (Lotfi Zadeh) عام ١٩٦٥ واستخدم في العديد من المجالات مثل نظرية التحكم والذكاء الاصطناعي .
يحاكي المنطق الضبابي الطريقة التي يتبعها البشر في صنع القرار والتي تعتد على الاخذ بعين الاعتبار جميع الاحتمالات الممكنه

يستخدم مبدأ المنطق الضبابي في عملية التحكم في الالات وبعض المنتجات الاشتهلاكية وعند التعمل مع حالات عدم اليقين في البرامجيات

المنطق الضبابي Fuzzy Logic:



نشأ مفهوم المنطق الضبابي عام ١٩٦٥ على يد العالم الأذربيجاني الأصل «لطفي زادة» من جامعة كاليفورنيا حيث طوّره ليستخدمه كطريقة أفضل لمعالجة البيانات وذلك عن طريق تطبيق طريقة تفكير اكثر شبها بالإنسان في برمجة البيانات، لكن نظريته لم تلق اهتماماً حتى عام ١٩٧٤ حيث استخدم منطق الغموض في تنظيم محرك بخاري، ثم تطورت تطبيقاته حتى وصلت لتصنيع شريحة منطق ضبابي والتي استعملت في العديد من المنتجات كآلات التصوير

الصفات الرئيسية للمنطق المضبب

1- في المنطق الضبابي كل شيء يحظى بدرجة انتماء.

2- كل نظام منطقي يمكن أن يُنمذَج في المنطق الضبابي.

3- تُترجم المعرفة في المنطق الضبابي كمجموعة من المتغيرات.

4- يتم عرض الاستنتاج على أنه معالجة منطقية لمجموعة موسَّعة من الشروط المرنة.

5- سهولة الفهم والمرونة و السماحية.

6- نمذجة النظم اللاخطية.

7- التصميم بالاعتماد على الخبرة البشرية.

المجموعات البينية التقليدية

في المجموعة التقليدية او الكلاسيكية يمكن لعنصر ما ان ينتمي لمجموعه او لا ينتمي لها. مثلا المجموعة A والمجموعة U اذا قمنا بتعريف الدالة μA التي تعطي لكل عنصر من العناصر المجموعة U درجه انتمائه الى المجموعة A , وذلك عبر اعطائها الرقم 1 اي $\mu A(x)=1$ اذا كان العنصر ينتمي للمجموعة U اي العنصر X ينتمي للمجموعة A. اما اذا كان العنصر x لا ينتمي لA فان الدالة μA تعطي الرقم صفر اي ان $\mu A(x)=0$.

- وعلى هذا فانه يمكن التعبير على الدالة μA كالتي:
- $\mu A: U \rightarrow \{0, 1\}$

المحموعة الضبابية

يقوم المنطق الضبابي على نظرية المجموعات الضبابية، والتي هي تعميم لنظرية المجموعات الكلاسيكية، ما يعني أنَّ الأخيرة هي حالة خاصة من الأولى، أي أنَّ المجموعات الكلاسيكية هي حالة خاصة من الضبابية، ففي المجموعات الكلاسيكية، إما أن ينتمي العنصر إلى المجموعة، أولا ينتمي ابدا في حين انه في المجموعات الضبابية يمكن ان ينتمي العنصر نفسة الى عدة مجموعات في الوقت ذاتة

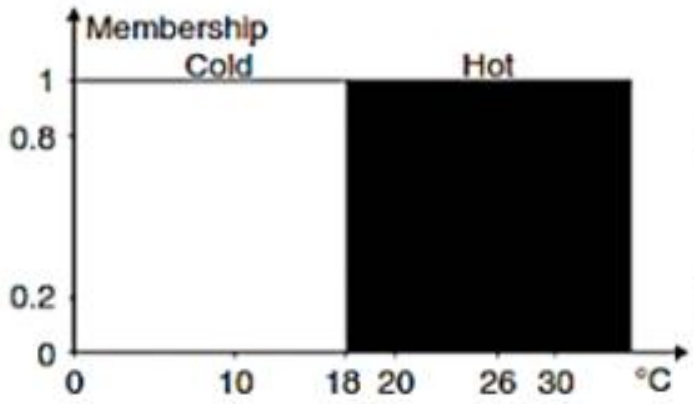
لنفترض أنَّ مجموعة من الناس تُسأل عن قيم درجة الحرارة التي يربطونها بالمفاهيم اللغوية الساخنة والباردة، في حالة استخدام مجموعات هشة (واضحة) Crisp، يجب اختيار عتبة معينة للحرارة، تعتبر درجات الحرارة التي تملك قيمة أعلى منها درجة حرارة ساخنة، والتي تملك قيمة أدنى منها درجة حرارة باردة، بالتالي إنَّ الوصول إلى إجماع حول هذه العتبة أمر صعب، وحتى ولو تم التوصل إلى اتفاق – على سبيل المثال: درجة الحرارة 18 درجة مئوية – هل من المعقول أن نخلص إلى أن (17.99999 درجة مئوية)، هي درجة حرارة باردة، في حين أنَّ (18.00001 درجة مئوية)، هي درجة حرارة ساخنة .

المجموعة الضبابية

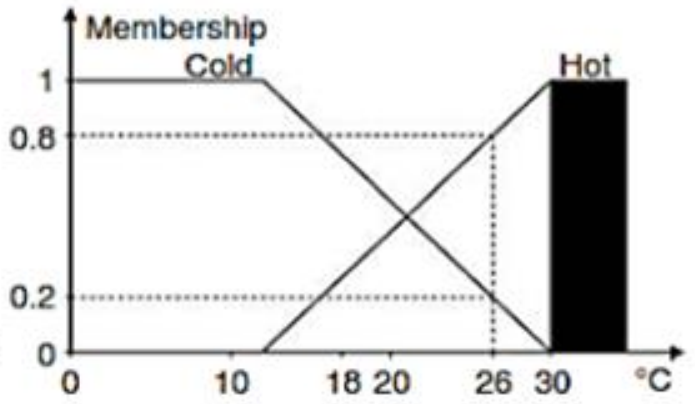
في المنطق الضبابي من النمط الأول، ينتمي العنصر إلى عدة مجموعات ضبابية مختلفة، وبدرجات عضوية مختلفة بالعودة للمثال السابق، يمكن أن تكون درجة الحرارة 18 درجة مئوية، تنتمي بدرجة انتماء 0.6 إلى درجات الحرارة الحارة، و0.4 إلى درجات الحرارة الباردة، توفر المجموعات الضبابية من النمط الأول وسيلة لحساب القيم المتوسطة بين القيم الواضحة المرتبطة بكونها صحيحة تماماً (1)، أو خاطئة تماماً (0). تتراوح هذه القيم بين 0 و1 (ويمكن أن تتضمنها)، بالتالي يمكن القول: أنّ المجموعة الضبابية، تسمح بحساب درجات الرمادي بين الأبيض والأسود (صحيح أو خاطئ)، وتعطي استجابة جيدة لنظام التحكم المنطقي من النوع الأول في مواجهة الضوضاء، وغيرها من أوجه عدم اليقين، وعدم الدقة .

المحموعة الضبابية

انتماء درجة الحرارة 18 إلى المجموعات التقليدية والمجموعات الضبابية :



المجموعات التقليدية



المجموعات الضبابية

ولتوضيح فكرة المجموعات الضبابية، نورد مثالاً لانتماء الحيوانات لمجموعة الحيوانات السريعة، ففي حالة المجموعات التقليدية، فإن الحيوان إما أن يكون سريعاً (ذو انتماء كلي للمجموعة)، وفي حالتنا هذه يظهر الفهد ذو انتماء كلي لهذه المجموعة، أو لا ينتمي إلى المجموعة أبداً (حيوان بطيء)، مثل الحلزون، ولكن نواجه مشكلة مع الحيوانات الأخرى مثل الكلب، حيث لا يمكن اعتباره حيواناً بطيئاً، أو حيواناً، سريعاً بشكل مطلق، حيث يقع في المنطقة الوسطى بين المجموعتين، ولحل هذه المشكلة تظهر المجموعة الضبابية التي من خلالها يمكن القول: أنَّ الكلب سريع بدرجة انتماء 75%، والغزال سريع بدرجة انتماء 95%، يظهر الشكل

مقارنة بين سرعة الحيوانات في المنطق التقليدي

Slow

Fast

مقارنة بين سرعة الحيوانات في المنطق الضبابي

S:Snail slowest [0.0-0.25]

T: Tortoise slow [0.25-0.50]

D:Dog: Fast [0.50-0.75]

L:Leopard Fastest [0.75-1.00]

المحموعة الضبابية

مثلا لو كانت المجموعة A مجموعة درجات الحرارة التي تصنف بالباردة (بارده بالنسبة للإنسان) ولنعتبر المجموعة Uهي كل درجات الحرارة .

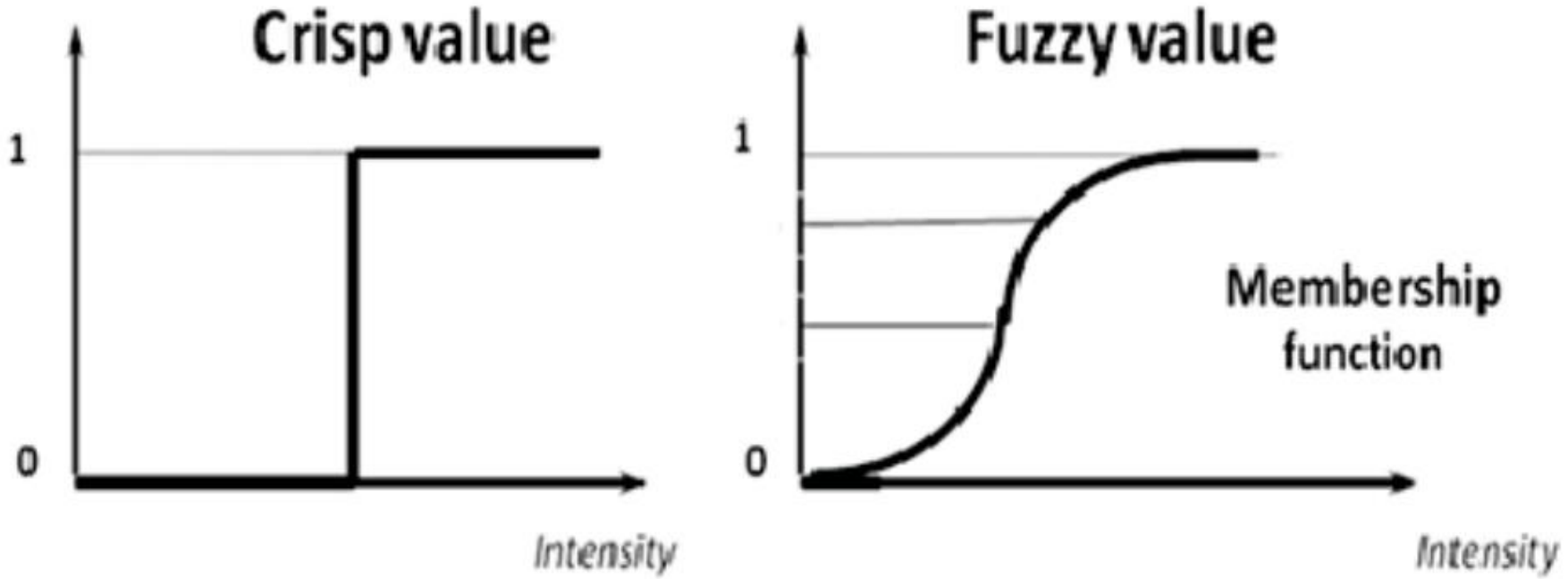
- نأخذ مثلا العنصر x =100- U, هذه درجه حراره بارده جدا ولذلك هي تنتمي تماما للمجموعة A أي ان $\mu A(x)=1$ اما اذا اخذنا درجه x =100+ فان هذه درجه حراره حاره جدا ولذلك العنصر x لا ينتمي ابدا الىA .

- الى الان لم نخرج عن استعمال المنطق الكلاسيكي حيث ان A كانت تنتمي او لا تنتمي. لكن لنأخذ مثلا درجه الحرارة $x=12$ في المنطق التقليدي لدينا احتمالين اما ينتمي اولا ينتمي لA. اما في المنطق الضبابي يمكن ان نقول ان x ينتمي الى بدرجة 50% الى A اي ان درجه الحرارة 12 درجه نصف بارده نصف معتدلة مثلا $A(x)=0.5$ وهنا نرى اختلاف في تعريف الدالة μA.
- حيث تعرف رياضيا:
- $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$
- حيث يمكن للدالة ان تعطي نتائج بين 1,0 على عكس الامر في المنطق الكلاسيكي حيث لا تعطي الدالة الا رقم 1 او رقم صفر.

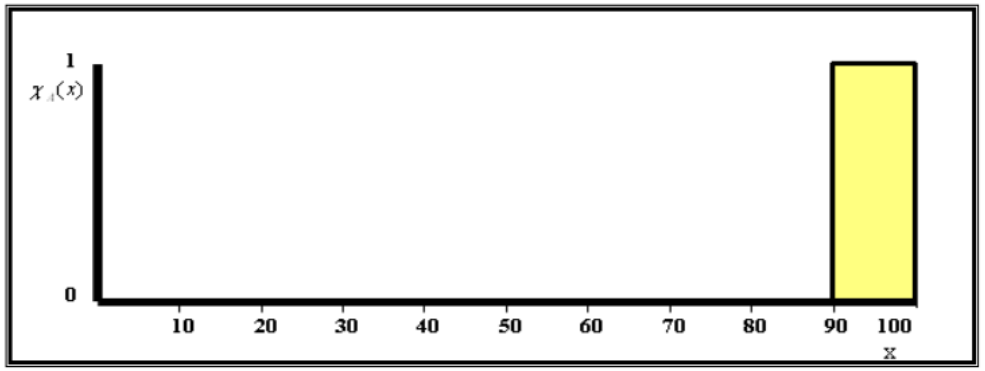
- اذا فان المجموعة الضبابية هي عبارة عن مجموعة تتميز بان حدودها مرنة وليست قطعية (Crisp)، ولايمكن تعريف حدودها بصورة واضحة ودقيقة، أي يتم فيها الابتعاد عن المنطق الحدي (ينتمي أو لاينتمي)، لان الغموض موجود دائما في أي عملية واقعية. فلو كانت X تمثل المجموعة الشاملة (Universal Set) فان المجموعة المضببة A من X هي عبارة عن مجموعة الأزواج المرتبة (Ordered Pairs) والمعرّفة بالصيغة الآتية:

- $A = \{x\ ,\ \mu_A(x)\}$
- لكل عنصر x في X، حيث أن $\mu_A(x)$ هي دالة عضوية العنصر x في A وان :

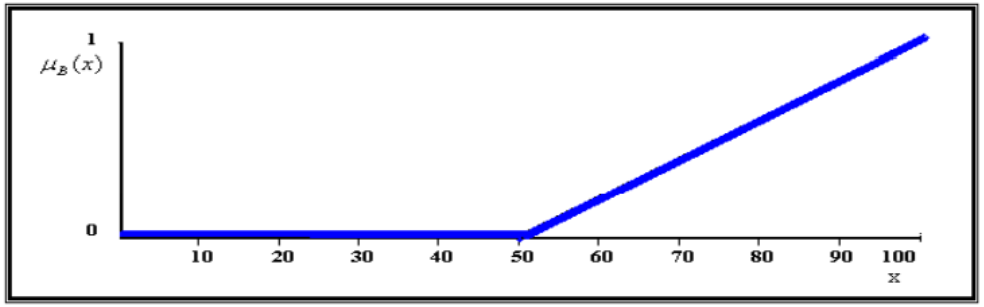
- $\mu_A(x) \in [0,1]$


Crisp value
1
0
Intensity
Fuzzy value
1
0
Membership function
Intensity

- **مثال:** افرض أن المجموعة البيّنة (الكلاسيكية) تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية الواقعة في الفترة المغلقة [90, 100]، وافرض أن المجموعة الضبابية B تمثل مجموعة الطلبة المتفوقون بجامعة الموصل. ارسم الدالة المميّزة للمجموعة A ودالة انتماء مقترحة للمجموعة B.



الدالة المميّزة للمجموعة A.

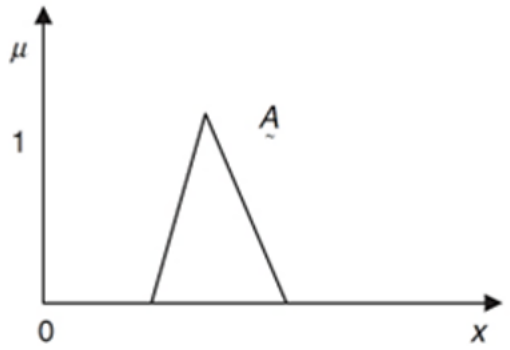


دالة انتماء مقترحة للمجموعة B.

رياضيات المنطق الضبابي

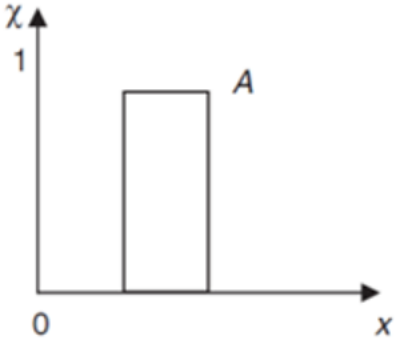
في المجموعات التقليدية (الكلاسيكية) ينتمي العنصر إلى المجموعة بشكل كامل، أو لا ينتمي إليها أبدا حيث يرمز لانتماء العنصر إلى المجموعة بالقيمة 1، وعدم انتمائه بالقيمة 0، بينما في المجموعات الضبابية، يمكن أن ينتمي العنصر إلى المجموعة بشكل كامل، أو ينتمي إليها بدرجة جزئية، حيث تنتمي عناصر المجموعة إلى المجموعة ذاتها بدرجات انتماء مختلفة، تتراوح بين القيمتين 0، وتمثل حالة عدم الانتماء للمجموعة، والقيمة 1 وتمثل الانتماء الكلي للمجموعة

$$\mu_A(x) \epsilon\ [0,1]$$



انتماء العنصر للمجموعة الضبابية

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$



انتماء العنصر للمجموعة الكلاسيكية

انتماء العنصر للمجموعة الضبابية والكلاسيكية

درجة العضوية

يُرفق بكل عنصر $x \in X$ قيمة عددية تكون عادة بين الصفر والواحد تمثل درجة انتماء هذا العنصر للمجموعة A، وكلما كانت درجة العضوية أعلى (أكبر) كان العنصر أكثر انتماءً للمجموعة A.

يُقال عن عنصر $x \in X$ إنه يتمتع بعضوية كاملة في المجموعة A إذا كانت درجة انتمائه للمجموعة A تساوي الواحد.

يُقال عن عنصر $x \in X$ إنه ليس عنصراً في المجموعة A إذا كانت درجة انتمائه للمجموعة A تساوي الصفر.

إن المجموعة X المزوَّدة عناصرها بهذه القيم العددية تدعى مجموعة ضبابية.

دالة العضوية

يمكن ان تتعين درجة انتماء عنصرلمجموعة بواسطة دالة تسمى دالة العضوية الدالة المعبرة عن درجة انتماء عنصر $x \in X$ للمجموعة A

دالة العضوية $\mu_A : x \rightarrow [0, 1]$

- إن المجموعات المزودة دالة العضوية السابقةهي مجموعات ضبابية.

- تكتب المجموعة الضبابية (الترجيحية) بشكل مجموعة ثنائيات مسقطها الأول عنصر من المجموعة ومسقطها الثاني درجة انتماء هذا العنصر للمجموعة.

مثال: بفرض المجموعة الشاملة $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ فإن المجموعة التالية A مجموعة ضبابية :

$$A = \{(1,0),(2,0.25),(3,0.5),(4,0.7),(5,0.8),(6,0.7),(7,1)\}$$

والعنصر 7 يتمتع بعضوية كاملة في A، والعنصر 1 ليس عضواً من A.

مثال

- نأخذ مثال مبسّط قليلاً عن طلب موظف للعمل لدى شركة، ولنقل أن الشروط الموضوعة كانت: أن يجيد طالب الوظيفة اللغة الانكليزية، وأن يكون جيداً جداً في استخدام الحاسوب، وأن يكون ذو مظهر لائق وأن يكون حاصل على شهادة أكاديمية عالية في علوم التسويق أو (حاصل على شهادة عادية في التسويق وله خبرة عملية جيدة في مجال التسويق).
- لاحظ أن كل البنود من مثل "يجيد اللغة الانكليزية" و"يجيد استخدام الحاسوب" و"ذو مظهر لائق" و"حاصل على شهادة" و"له خبرة جيدة" ...الخ كلها ليست تحديدات واضحة قيمتها صح أو خطأ بل تتدرج بقيم صحة ضبابية، والعوامل التي تم جمع هذه البنود هي عوامل منطقية ضبابية مثل "جداً" و"و" و"أو". إذاً عند تقييم أي طالب للوظيفة توضع له علامة (بين الصفر والواحد) لكل بند من البنود، وباستخدام العوامل المنطقية نحصل على علامة مواءمته لهذه الوظيفة وبالمفاضلة بين العلامات النهائية التي نحصل عليها من جميع المتقدمين يكون صاحب القيمة الأعلى هو الموظف المنشود.

وضع الشروط بطريقة تقليدية

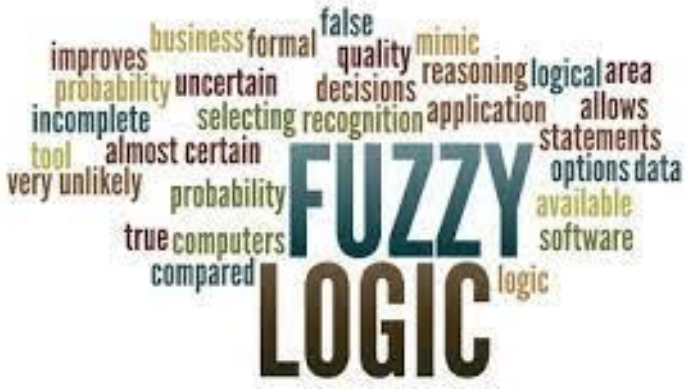
أما بالمقابل إذا أصرينا على وضع الشروط بطريقة تجعل من الممكن استخدام المنطق العادي فإننا سنضطر أولاً لوضع تحديدات واضحة قيمتها صح أو خطأ مثل "حاصل على شهادة توفل في اللغة الانكليزية" و"حاصل على شهادة معينة في علوم الحاسوب" ...الخ، وهي ستظلم الكثير من الأشخاص بالإضافة إلى أنها لا تقدم لنا طريقة واضحة للمفاضلة بين المتقدمين المختلفين ويعود الأمر بالنهاية إلى مزاجية مدير المصادر البشرية في الشركة.

من الواضح إذاً أنه في المسابقات يكون لاستخدام المنطق الضبابي أفضلية على المنطق العادي.

الطقس

- لنأخذ مثال آخر يتعلق بموضوع مهم للكثير من الأمور كالسياحة والتجارة والسفر وغيرها وهو الطقس. لنسأل السؤال التالي: هل الطقس يكون جميلاً في هذا البلد في وقت معين من السنة؟
- من الواضح أن عبارة "الطقس جميل" لها قيمة ضبابية فقد يتدرج الطقس من سيء جداً إلى جميل للغاية، بالإضافة إلى أنها عبارة مركبة تشمل العديد من العوامل، فالطقس الجميل يعني مثلاً أن يكون الجو صاحياً بشكل مقبول وأن تكون الحرارة معتدلة وأن تكون الرطوبة ضعيفة وأن تكون الريح معتدلة السرعة. من الواضح أن كل هذه القيم ضبابية وبالتالي إن العبارة السابقة تشكل معادلة ضبابية

You never fail until you stop trying



Dr. Omar Saber Qasim Dr.Fatima Mahmood Hasan
College of computer science and mathematics
Department of mathematics