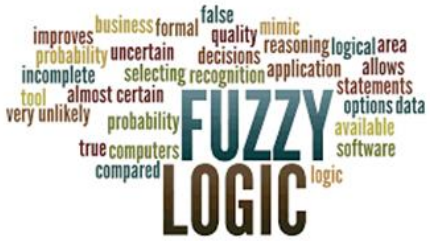
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات
المرحلة الثالث/ المحاضرة ٣,٢



Fuzzy Mathematics الرياضيات الضبابية

أ.د.عمر صابر قاسم أ.م.د.فاطمة محمود حسن

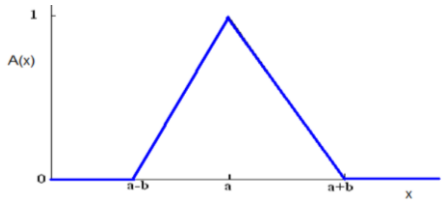
كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

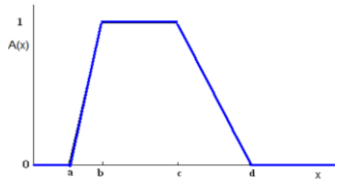
2024-2025

Functional Representation التمثيل الدالي

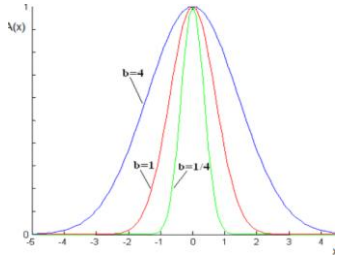
يعدُّ هذا التمثيل من أكثر طرائق التمثيل شيوعا وذلك لسهولة التعامل الرياضي معه وحسب هذا التمثيل فإن دالة الانتماء تكون بشكل دالة رياضية معينة، يتم من خلالها تحديد نسبة الانتماء إلى خصائص المجموعة، والشرط الأساس لهذه الدالة أن يقع مداها بين الصفر والواحد، كما أن لها أشكالاً متعددة منها:



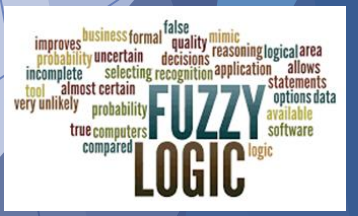
١-الدالة المثلثية Triangular Functional



٢- دالة شبة المنحرفTrapezoidal Function



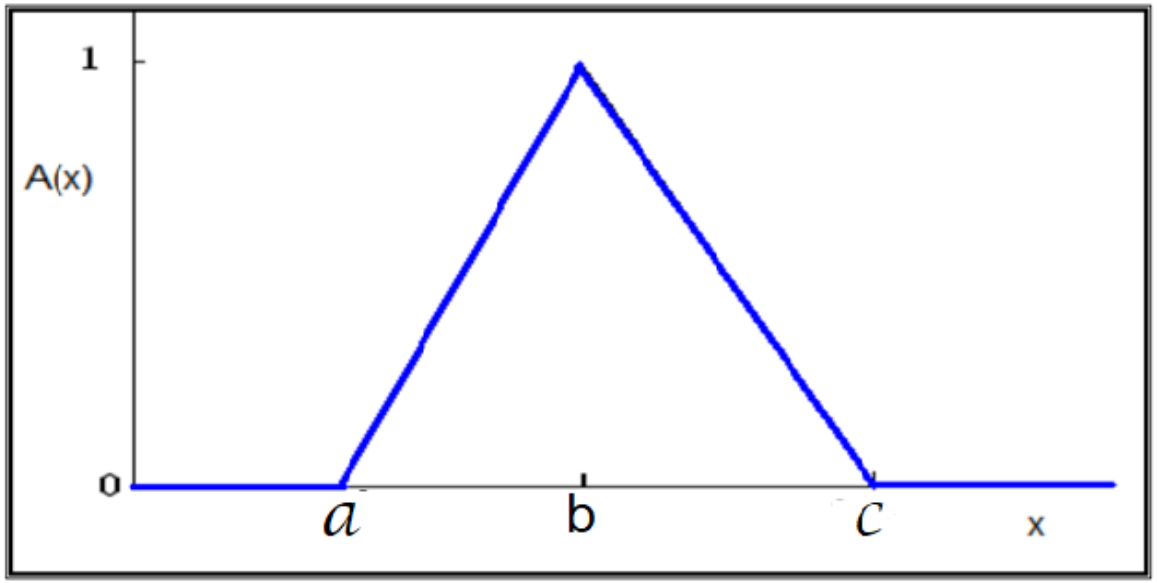
٣- دالة كاوس Gaussian Function



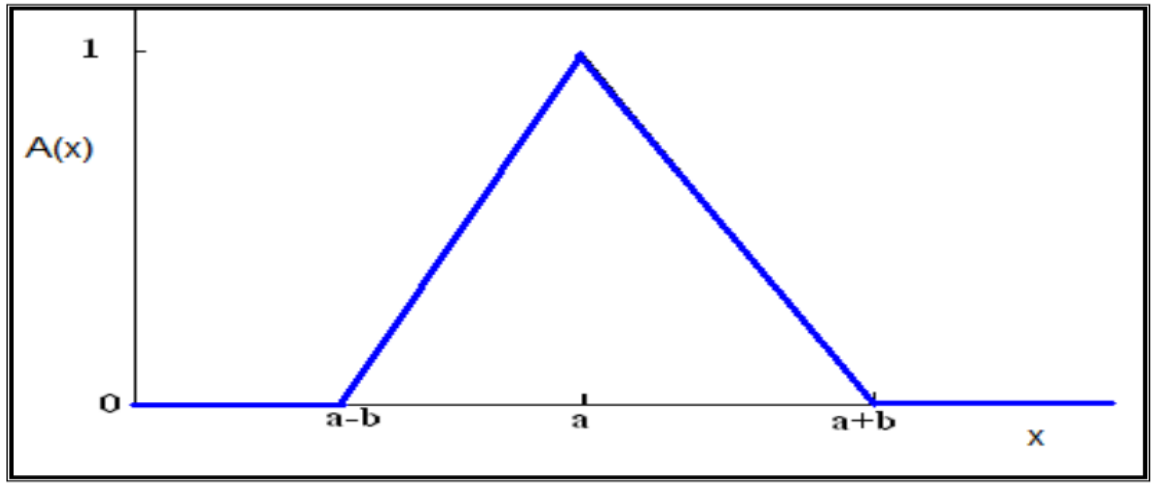
أ.د.عمر صابر قاسم أ.م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

١ـ الدالة المثلثية Triangular Functional

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; \quad a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & ; \quad b \le x \le c \\ 0 & ; \quad c \le x \end{cases}$$



دالة الانتماء المثلثية.



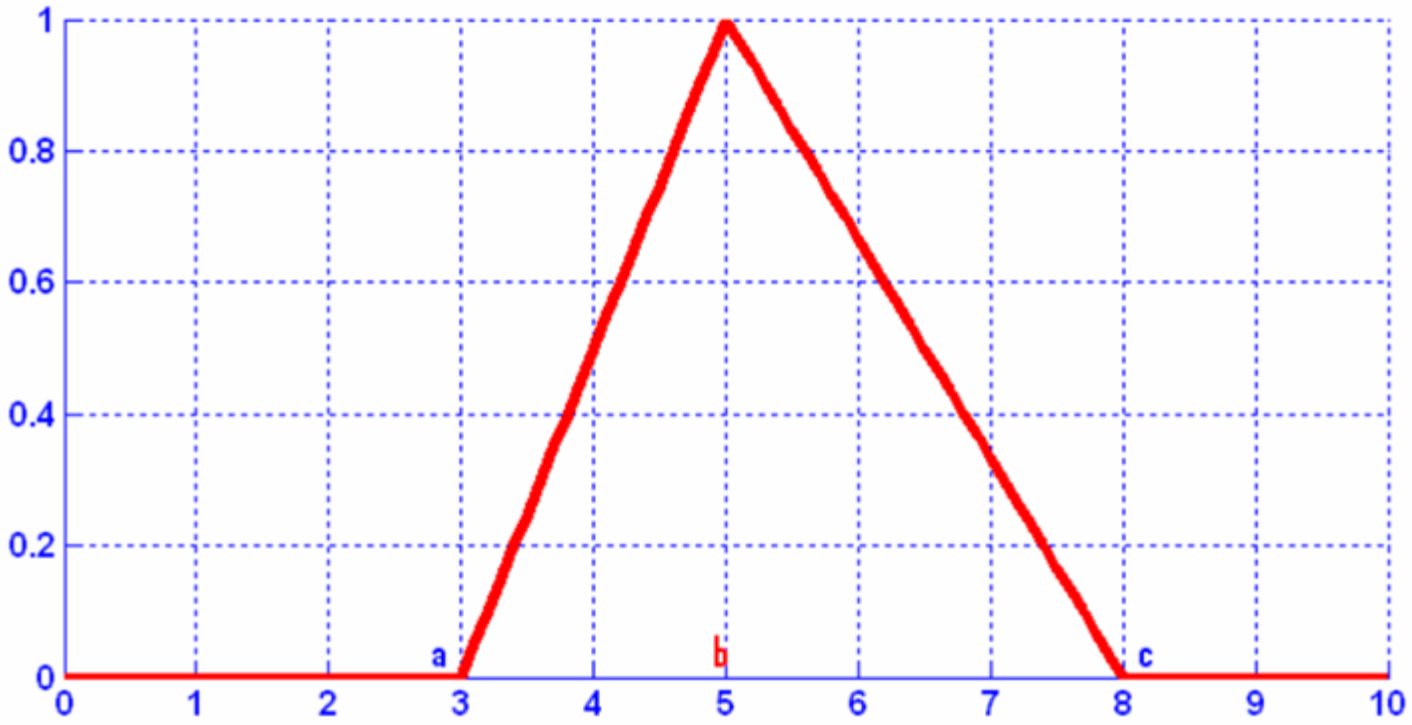
دالة الانتماء المثلثية.

إن المعلمة a تمثل قيمة x التي لها أعلى انتماء، وأما المعلمة b فتمثل مقدار البعد من اليمين ومن اليسار عن a، ورسم هذه الدالة مبين في الشكل الآتي. تستخدم هذه الدالة مع المجموعات الضبابية التي تكون فيها أعلى انتماء (المركز) بشكل قيمة واحدة، وتتناقص هذه الانتماء كلما ابتعدنا عن المركز

إن دالة الانتماء التي لها شكل معاكس للدالة السابقة، سنطلق عليها تسمية المثلثية المقلوبة، يمكن الحصول عليها من طرح الدالة السابقة من الواحد.

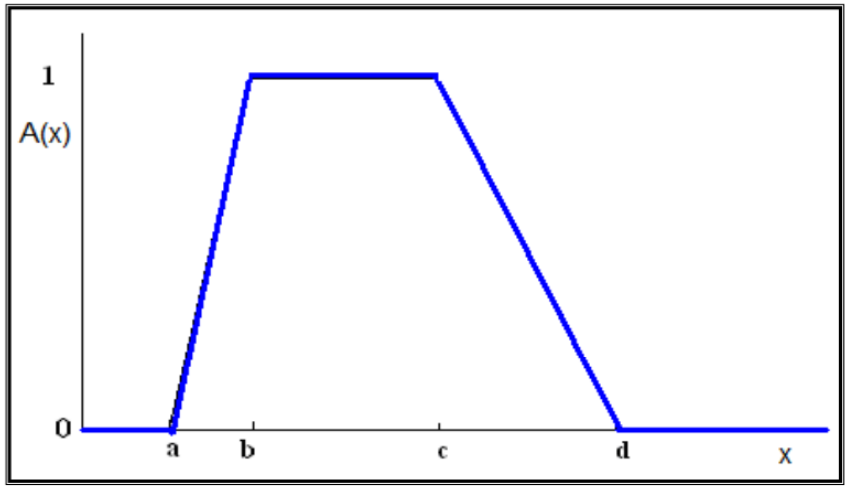
الشكل يوضح مثالاً للدالة المثلثيّة علماً أن معاملاتها :

$a= 3$ و $b = 5$ و $c= 8$



٢ـ دالة شبة المنحرفTrapezoidal Function

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; \quad a \le x \le b \\ 1 & ; \quad b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & ; \quad c \le x \le d \\ 0 & ; \quad d \le x \end{cases}$$



دالة الانتماء الشبه المنحرف

إن دالة الانتماء التي لها شكل معاكس للدالة السابقة، سنطلق عليها تسمية شبه المنحرف المقلوب.

إذ إن المعلمتين b و c يمثلان قيم x التي تكون عندها أعلى انتماء، في حين أن المعلمتين c و d يمثلان حدود قيم x التي تتلاشى عندها الانتماء، و تستخدم هذه الدالة مع المجموعات الضبابية التي تكون فيها أعلى انتماء (المركز) بشكل عديد من القيم تقع في الفترة [b , c]، وتتناقص قيم هذا الانتماء كلما ابتعدنا عن بداية الفترة x=b ونهايتها x=c، حتى تتلاشى عندما نصل إلى الإحداثيين x=a و x= d.مثال على المجموعات الضبابية التي تناسبها هذه الدالة، المجموعة A="تقريبا بين 4 و 7 "، هنا تكون b=4 و c=7 و a=b-1=3 و d=c+1=8.

a,b,c,d : تمثل الإحداثيات السينية للرؤوس الأربعة لشبه المنحرف و قيمها يجب أن تحقق الشرط التالي :

$$a < b < c < d$$

القيم الحقيقية التي تقع بين b و c تكون درجة عضويتها 1 ، أما القيم المحصورة بين a و b فان درجة عضويتها تزداد كلما اقترب العنصر من b ، في حين إن العناصر الواقعة بين c و d تقل درجة عضويتها تدريجياً كلما اقترب العنصر من d ، و تكون درجة العضوية صفراً فيما عدا ذلك. الشكل يوّضح مثالاً لدالة شبه المنحرف عندما $a = 1$ ، $b = 5$ ، $c = 7$ و $d = 8$.

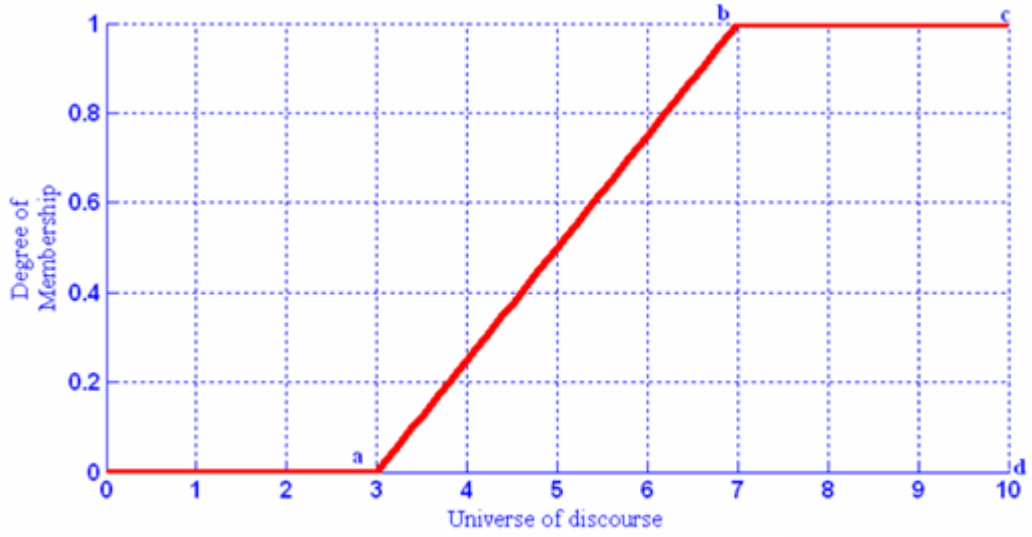
دالة شبه المنحرف

من الجدير بالذكر إن هناك حالات خاصة من دوال شبه المنحرف و هي :

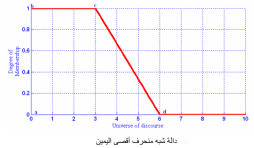
دالة شبه منحرف أقصى اليسار

❖ شبه المنحرف أقصى اليسار Leftmost Trapeoidal

هي دالة شبه منحرف عندما يتساوى قيمتى c و d مع قيمة العنصر الأخير
و تسمى أحياناً دالة الميل للأعلى (Upward Slope) . العناصر الواقعة بين a و b
تزداد درجة عضويتها كلما اقترب العنصر من b فى حين إن العناصر المحصورة بين b و c
تمتلك درجة العضوية 1 . الشكل يعطي مثالاً لدالة شبه منحرف أقصى اليمين حيث :
. a =3 و b=7 و c = d = 10

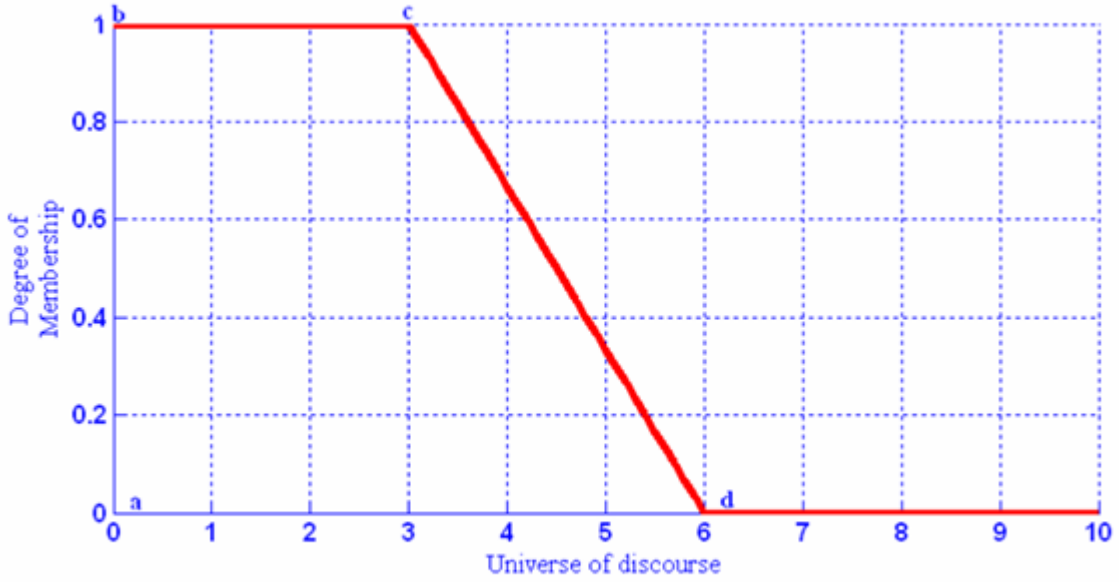


دالة شبه منحرف أقصى اليسار



❖ شبه المنحرف أقصى اليمين RightmostTrapeoidal

هي دالة شبه منحرف عندما يتساوى قيمتي a و b مع قيمة العنصر الأول و تسمى أحياناً دالة الميل للأسفل (Downward Slope) . تمتلك العناصر الواقعة بين b و c درجة العضوية 1 في حين تقل درجة العضوية للعناصر المحصورة بين c و d كلما اقترب العنصر من d . الشكل يعطي مثالاً لدالة شبه منحرف أقصى اليسار حيث d = 6 و c = 3 و a = b=0 .

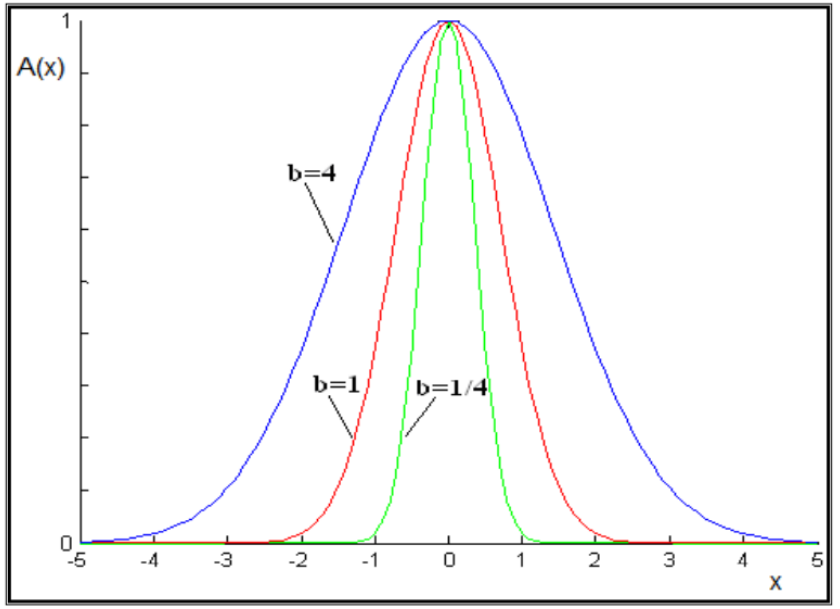


دالة شبه منحرف أقصى اليمين

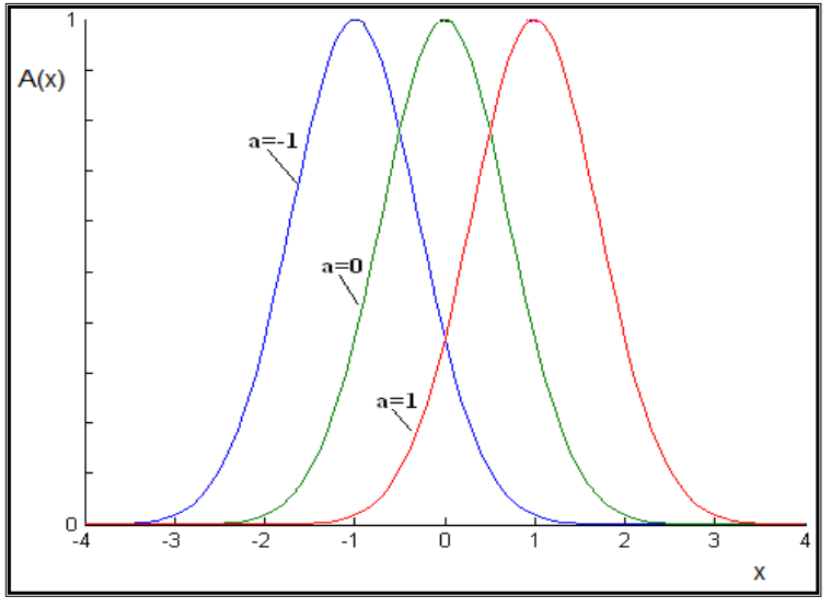
٣- دالة كاوس Gaussian Function

$$A(x) = e^{-(x-a)^2 / b}$$

إذ إن x ممكن أن تأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة وان a و b هما معلمتان. إن المعلمة a تمثل قيمة x التي تقابل قمة المنحني الطبيعي، وهذه المعلمة ممكن أن تكون موجبة أو سالبة أو صفرا. أما المعلمة b فهي معلمة موجبة دائما مسئولة عن مقدار التفلطح في المنحني الطبيعة. والشكل الاتي يبين بعض الحالات لهذه الدالة.



دالة الانتماء الطبيعية عند a=0 وقيم مختلفة من b.

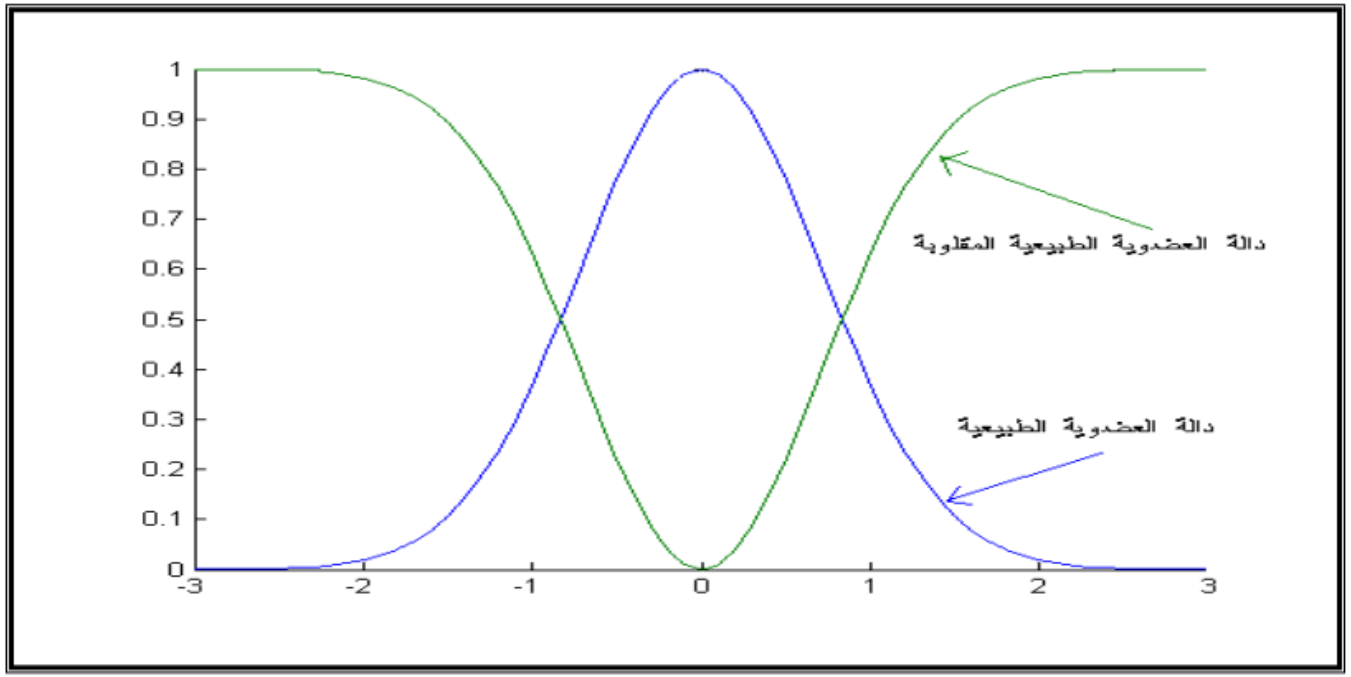


دالة الانتماء الطبيعية عند b=1 وقيم مختلفة من a.

إن دالة الانتماء التي لها شكل معاكس للدالة السابقة، سنطلق عليها تسمية دالة الانتماء الطبيعية المقلوبة، يمكن تمثيلها بالعلاقة الآتية:

$$A(x) = 1 - e^{-(x-a)^2/b}$$

ورسم هذه الدالة، مقارنة مع الدالة السابقة، مبين في الشكل الآتي.



ملاحظة: هناك أشكال أخرى متعددة يمكن اختيارها، وحسب طبيعة المسألة، لدالة الانتماء

تعتبر دالة كاوس الدالة الأكثر شعبية بين دوال العضوية و ذلك للأسباب الآتية:

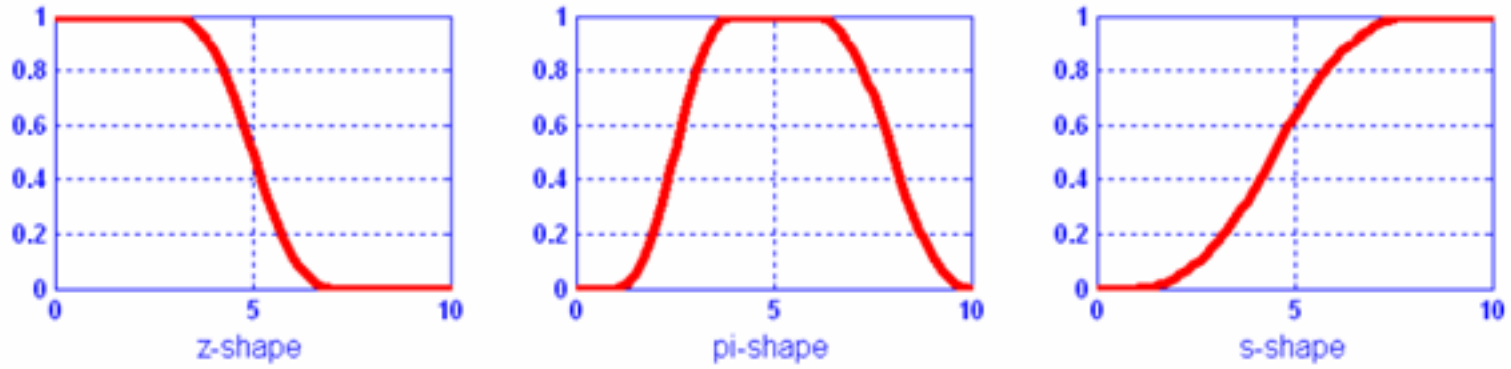
- إنها تتمتع بالانسيابية (Smoothness) كونها تتعامل مع قيم مستمرة (Continuous) .
- سهولة تطبيق معادلتها فهي لا تتضمن خيارات و شروط متعددة مقارنة بالدوال السابقة .
- جميع قيمها تكون غير صفرية.

و مع إن دالة كاوس تتمتع بالعديد من المزايا إلاّ إنها ليست قابلة للتطبيق في مسائل تحتاج إلى دوال عضوية غير متناظرة (Asymmetric Membership Functions) و التي تكون ضرورية في الكثير من التطبيقات .

دوال العضوية المعتمدة على متعددة الحدود

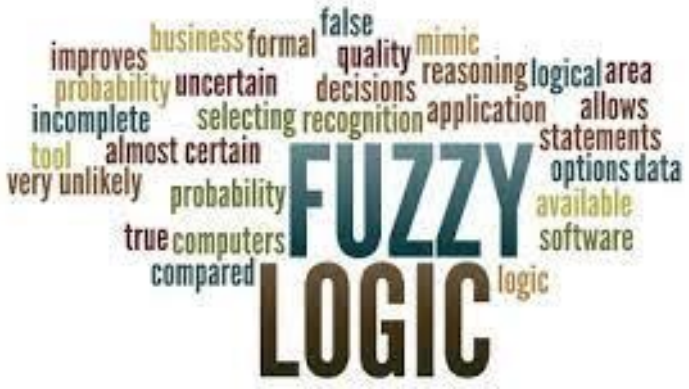
Polynomial based Membership Function

تشمل مجموعة الدوال المعتمدة على متعددة الحدود ثلاث دوال سميت بالاعتماد على أشكالها ، و هي الدالة التي تأخذ شكل Z (Z-shape) و الدالة التي تأخذ شكل S (S-shape) و الدالة التي تأخذ شكل علامة النسبة الثابتة Π (Pi-shape). الشكل يوّضح هذه الدوال ، :



دوال العضوية المعتمدة على متعددة حدود

You never fail until you stop trying



Dr. Omar Saber Qasim Dr.Fatima Mahmood Hasan
College of computer science and mathematics
Department of mathematics