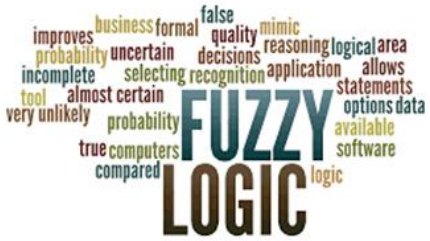
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات
المرحلة الثالث/ المحاضرة ٦,٧



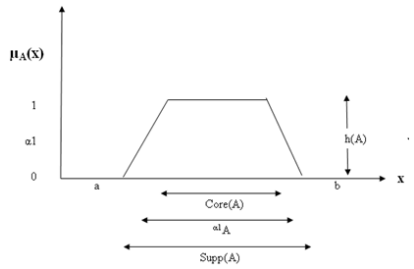
الرياضيات الضبابية Fuzzy Mathematics

أ.د.عمر صابر قاسم أ.م.د.فاطمة محمود حسن

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

2024-2025



❖ خصائص المجموعة الضبابية

ان حصر (تقييد) درجات العضوية مسألة لها اهمية خاصة عند دراسة المجموعات المضببة . ومن الجوانب التي اهتم بها الباحثون في هذا المجال هو حصر درجة العضوية وبحيث لا تقل قيمتها عن قيمة معينة الفا α ، اذ ان α تقع في الفترة [٠,١] .

- القطع – الفا α –cut

$$\overset{\alpha}{A}=\{\chi\in X \mid M_A(\chi)\geq\alpha\}\ ,\ \alpha\in[0,1]$$

- القطع – الفا القوي (α –cut- Strong)

$$^{\alpha+}A=\{\chi\in X\mid M_A(\chi)\succ\alpha\}:\alpha\in[0,1]$$

- المجموعة الداعمة The Support Set

$$\sup p(A)=^{0+}A=\{\chi\in X:M_A(\chi)\succ 0\}.$$

- مجموعة النواة The Core Set

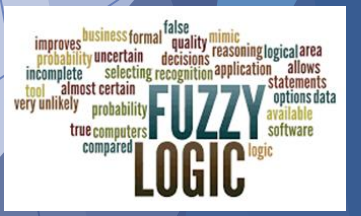
$$Cor(A)=^{1}A=\{\chi:\chi\in X\mid M_A(\chi)=1\}.$$

- علو المجموعة height of the Set

$$h(A)=\max_X(\mu_A(x))$$

- مجموعة المستوى Level Set

$$L(A)=\{\alpha\in[0,1]:M_A(x)=\alpha:\chi\in X\}$$



أ.د.عمر صابر قاسم أ.م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

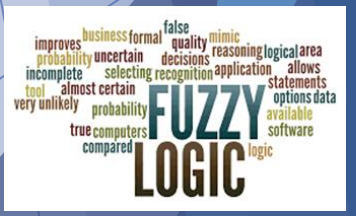
خصائص المجموعة الضبابية

ان من اهم الخصائص التي تتميز بها المجموعات الضبابية عن المجموعات التقليدية الاعتيادية:

- **القطع – الفا cut** – α

إذا كانت A هي مجموعة ضبابية في المجموعة الشاملة X، فان القطع – الفا للمجموعة A، يرمز له $\overset{\alpha}{A}$ ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يأتي:

$$\overset{\alpha}{A}=\{\chi\in X \mid M_A(\chi)\geq\alpha\} \ , \ \alpha\in[0,1]$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

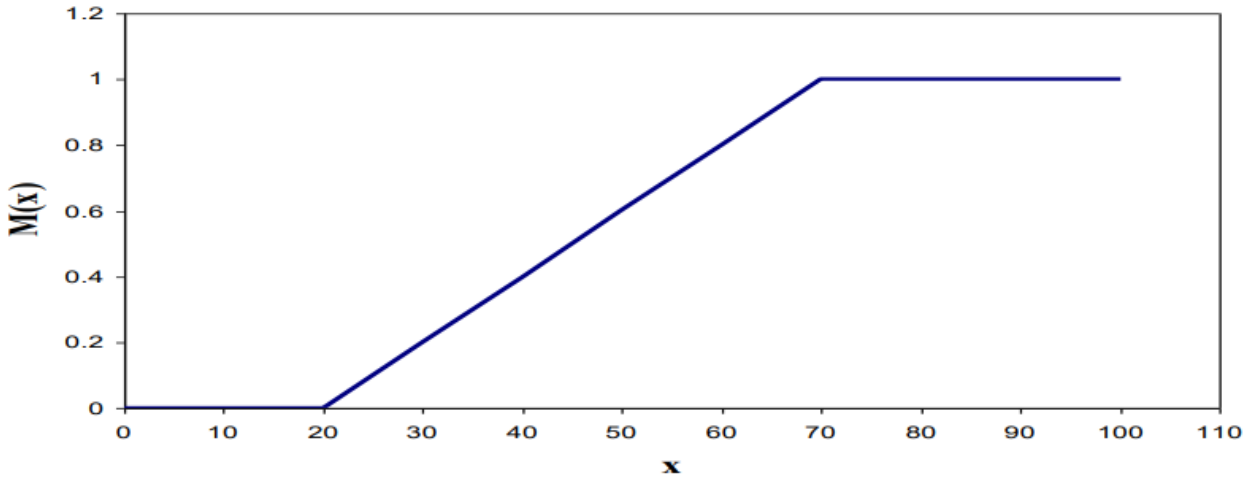
مثال لنفرض ان هناك معرضاً للكتب وان اسعار الكتب فيه بالدولار كما يأتي:

$$x = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$

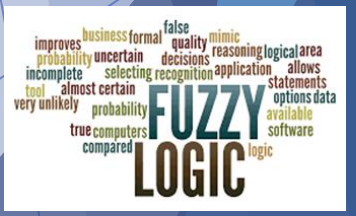
ولو عرفنا المجموعة الضبابية A بأنها:

$$A = \{\text{الكتاب غالي الثمن}\}$$

وباعتبار ان الانتماء الى مجموعة الكتب الغالية الثمن في هذا المعرض يبدأ بالكتاب الذي ثمنه 20 دولاراً، ويصل الذروة عند الثمن 70 دولاراً فصاعداً.



دالة عضوية مجموعة الكتب الغالية بالمعرض



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

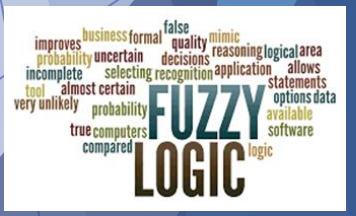
٢٠٢٣-2022

وما دامت المجموعة الشاملة تضم عناصراً متقطعة Discrete، فيمكن كتابة دالة العضوية بالشكل الاتي :

$$M_A(\chi) = 0/0 + 0/10 + 0/20 + 0.2/30 + 0.4/40 + 0.6/50 + 0.8/60 + 1/70 + 1/80 + 1/90 + 1/100$$

مع ملاحظة ان علامتي "+" و "/" هما مجرد رمزين ولا يعنيان علامتي جمع وقسمه.

لاي حصر (قيد) من درجة العضوية للمجموعة المضببة يمكن ايجاد مجموعة بينة جزئية وحيدة من المجموعة الشاملة .



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

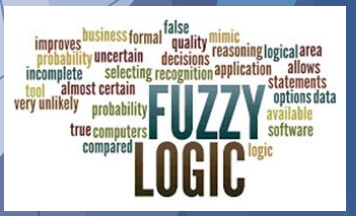
حيث يمكن كتابة دالة العضوية بالشكل الاتي:

$$M_A(\chi) = 0/0 + 0/10 + 0/20 + 0.2/30 + 0.4/40 + 0.6/50 + 0.8/60 + 1/70 + 1/80 + 1/90 + 1/100$$

$$^{0}A = \{0,10,20,\ldots,100\} = X.$$

$$^{0.2}A = \{30,40,50,\ldots,100\}.$$

$$^{0.9}A = {}^{1}A = \{70,80,90,100\}.$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

مبرهنة : لأي مجموعة ضبابية A، إذا كانت $\alpha_1 \prec \alpha_2$ فان:

$$^{\alpha 2}A \subseteq A^{\alpha 1}.$$

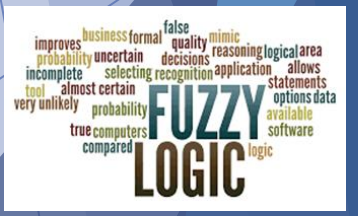
$$^{\alpha 1}A \cap {}^{\alpha 2}A = {}^{\alpha 2}A$$

$$^{\alpha 1}A \cup {}^{\alpha 2}A = {}^{\alpha 1}A .$$

البرهان : حسب التعريف فان

$$^{\alpha 1}A = \{\chi \in X \mid M_A(\chi) \geq \alpha_1\}$$
$$^{\alpha 2}A = \{\chi \in X \mid M_A(\chi) \geq \alpha_2\}$$

وما دامت $\alpha_1 \prec \alpha_2$ وانه لأي عنصر $\chi \in X$ ويقع ضمن $^{\alpha 2}A$ فان دالة العضوية تحقق القيد $M_A(\chi) \geq \alpha_2$ وما دامت $\alpha_1 \prec \alpha_2$ فأنه حتماً سيؤدي ذلك الى $M_A(\chi) \geq \alpha_1$ وهذا يؤدي بالنتيجة الى مصداقية هذه المبرهنة.



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

القطع – الفا القوي Strong $\alpha - cut$:

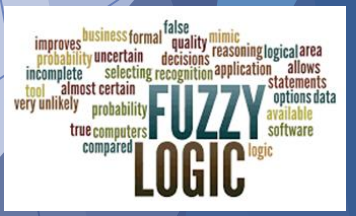
اذا كانت A هي مجموعة ضبابية في المجموعة الشاملة X ، فان القطع– الفا القوي للمجموعةA ، يرمز له $A^{\alpha+}$ ويعرّف بانه عبارة عن مجموعة بينة جزئية من X تضم جميع عناصر المجموعة X والتي تقابل درجة العضوية $M_A(x)$ التي هي اكثر من α . رياضياً نعبرّ عن ذلك كما يأتي :

$$^{\alpha+}A = \{x \in X |\ M_A(x) \succ \alpha\} : \alpha \in [0,1]$$

وبالعودة الى المثال نلاحظ بان :

$$^{0+}A = (20,100] = \{30,40,50,\ldots,100\},$$

$$^{0.2+}A = (30,100] = \{40,50,60,\ldots,100\},$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

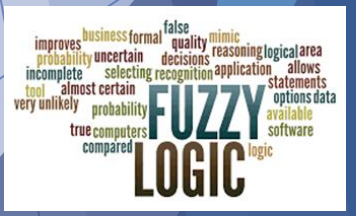
مجموعة الدعم The Support Set:

هي مجموعة جميع عناصر المجموعة الشاملة X والتي لها درجة عضوية غير صفرية في A أي ان عناصر هذه المجموعة يحملون درجة عضوية اكبر من الصفر ، لذا نطلق على هذه المجموعة بالمجموعة الساندة للمجموعة A ونرمز لها Supp (A)، ويمكن تعريفها بدلالة قطع – الفا القوي عند $\alpha = 0$ أي ان:

$$\sup p(A) = {}^{0+}\mathrm{A} = \{\chi \in \mathrm{X} : \mathrm{M}_{\mathrm{A}}(\chi) \succ 0\}.$$

ومن المثال السابق نجد ان:

$$\sup p\,(A) = (20,100] = \{30,40,50,\ldots,100\}.$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

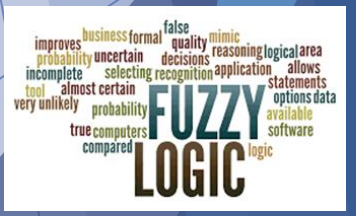
مجموعة النواة The Core Set:

هي مجموعة جميع عناصر المجموعة الشاملة التامة العضوية (درجة عضويتها1). فاذا كانت A هي مجموعة ضبابية في X فان مجموعة نواة المجموعة A، يرمز لها Core (A)، وتعرّف بانها قطع – الفا للمجموعة A عند $\alpha = 1$ وتعرّف كما يأتي :

$$Cor(A) = {}^{1}\mathrm{A} = \{x : x \in \mathrm{X} |\ \mathrm{M}_{\mathrm{A}}(x) = 1\}.$$

ومن المثال السابق نجد ان:

$$Cor(A) = [70,100] = \{70,80,90,100\}.$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

مثال افرض ان المجموعة الشاملة $X = \{a, b, c, d, e\}$ وان كل من A و B مجموعات جزئية ضبابية من X معرفة كما يأتي:

$$A = \{1/a, 0.3/b, 0.2/c\ 0.8/d, 0/e\}$$

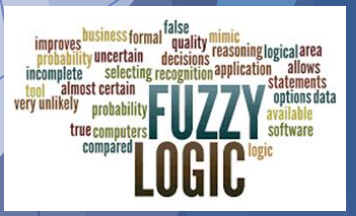
$$B = \{0.6/a, 0.9/b, 0.1/c, 0.3/d, 0.2/e\}$$

المطلوب إيجاد Core (A) و Core (B) و Supp (A) و Supp (B)

الحل :

$$supp(A) = \{a, b, c, d\}$$

$$supp(B) = \{a, b, c, d, e\}$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

علو المجموعة Height:

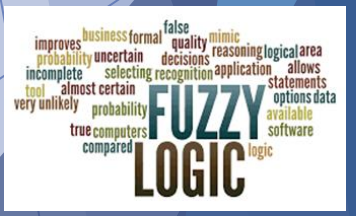
ان علو (ارتفاع) المجموعة الضبابية A، يرمز له h(A) ، ويعرَّف بانه عبارة عن عدد حقيقي يقع في الفترة [0,1] ويمثل اكبر قيمة من α بشرط ان لا يكون القطع – الفا للمجموعة A خالياً من العناصر. بعبارة اخرى فان علو المجموعة الضبابية هو عبارة عن اعلى درجة عضوية يمكن ان ينالها أي عضو في تلك المجموعة.

$$h(A) = \max_x(\mu_A(x))$$

❖ ملاحظة

اذا كان علو المجموعة الضبابية A، h(A)=1، فعندئذٍ تسمى A مجموعة طبيعية **normal**، وبخلاف ذلك، اذا كان $h(A) < 1$

، فعندئذٍ تسمى A مجموعة طبيعية جزئياً **subnormal** .



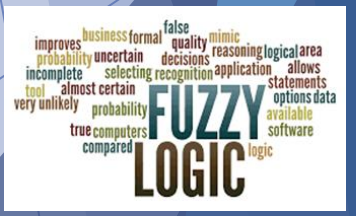
أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

مثال إذا كانت المجموعة الشاملة تضم الدرجات التي يحصل عليها الطلبة في امتحان من عشرة درجات. وباعتبار ان الطالب المتفوق تكون درجته بحدها الادنى $\frac{5}{10}$ فما دون وبحدها الاعلى $\frac{7}{10}$

فما فوق. ولو فرضنا ان المجموعة الضبابية A تمثل ان يكون الطالب متفوقاً.

- جد دالة عضوية المجموعة A (افرض انها دالة خطية).
- جد المجموعة الساندة للمجموعة A.
- جد نواة المجموعة A.
- جد علو المجموعة A.



أ.د. عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

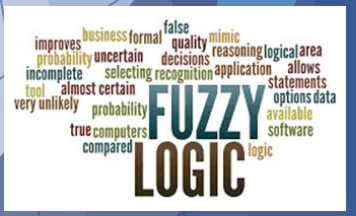
٢٠٢٣-2022

- **الحل:** المجموعة الشاملة لدرجات الامتحان

$$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{\text{الطالب المتفوق}\}$$

$$\underset{A}{M}(\chi) = 0/0 + 0/1 + 0/2 + 0/3 + 0/4 + 0/5 + 0.5/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$$



أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

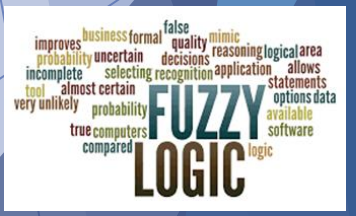
٢٠٢٣-2022

مجموعة المستوى Level Set:

ان مجموعة الاعداد التي تمثل جميع قطوع – الفا المختلفة للمجموعة الضبابية A تسمى مجموعة المستوى للمجموعة A ، ويرمز لها L(A) . ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً على النحو الاتي:

$$L(A)=\{\alpha\in[0,1]:\mathbf{M}_{\mathrm{A}}(x)=\alpha:\chi\in\mathrm{X}\}$$

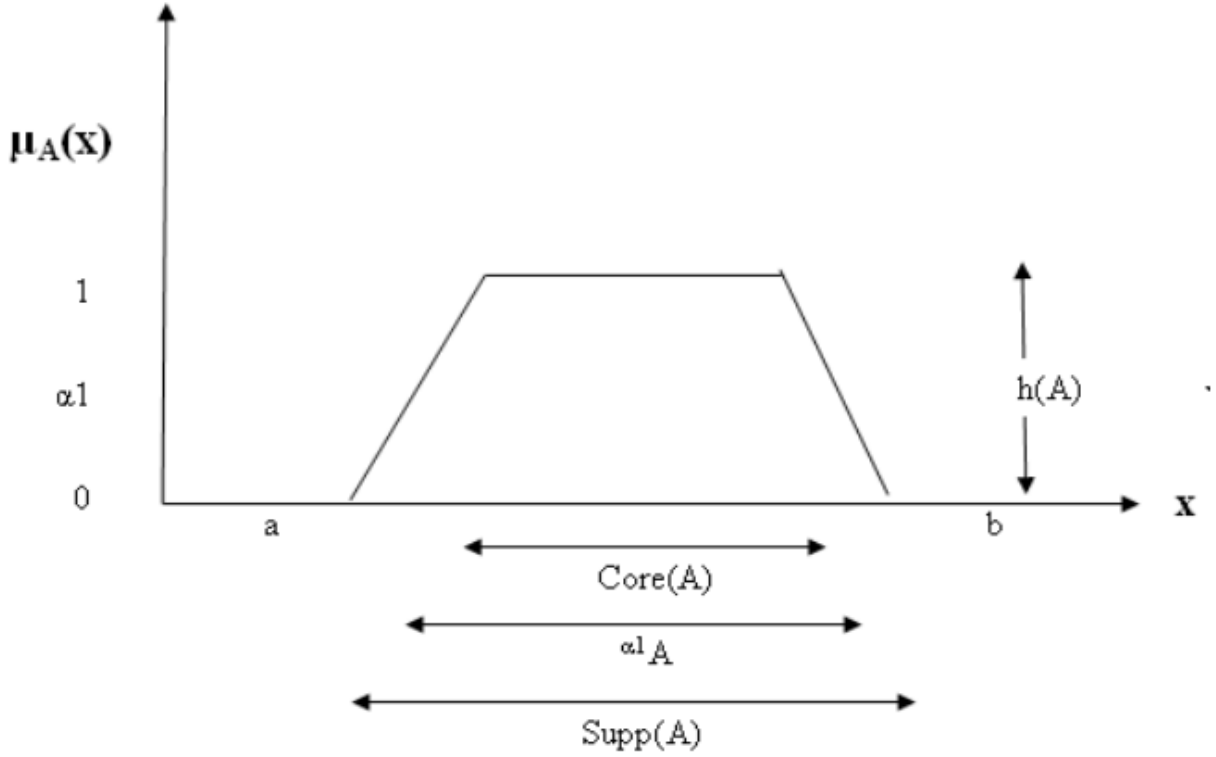
❖ **ملاحظة** ان مجموعة المستوى للمجموعات الضبابية ذوات الطبيعة المستمرة تتألف من جميع الفترة [0,1] ، اما بالنسبة للمجموعات الضبابية ذوات الطبيعة المتقطعة فتكون بشكل نقاط ، مثلاً L(A) = {0,0.1,0.2,..,1.0}

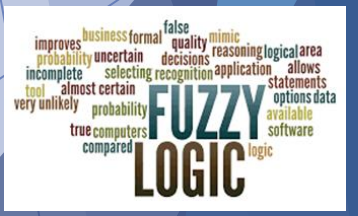


أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

مثال افرض ان A هي مجموعة ضبابية معرفة في المجموعة الشاملة $X = [a,b]$. وبفرض ان A لها دالة عضوية بشكل منحرف، فان الشكل الاتي يوضح مفاهيم المجموعة الساندة والمجموعة النواة وعلو المجموعة اضافة الـ القطع ـالفا





أ.د.عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

مبدأ (قاعدة) التوسيع Extension Principle

مثـال : اذا كانـت A و B مجموعتـان مضـببتان فـي المجموعـة الشـاملة X وبدالـة عضوية

$$M_A(x) = 0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5$$

$$M_B(x) = 1/x_1 + 0.7/x_2 + 0.5/x_3 + 0.3/x_4 + 0.1/x_5$$

فان المجموعة الضبابية $A \cup B$ لها دالة عضوية

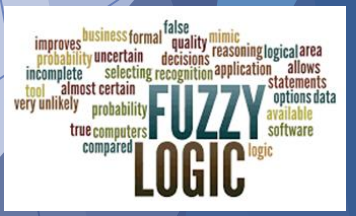
$$M_{A\cup B}(x) = \max\left[M_A(x), M_B(x)\right]$$

$$= 1/x_1 + 0.7/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5$$

كذلك فان المجموعة الضبابية $A \cap B$ لها دالة عضوية

$$M_{A\cap B}(x) = \min\left[M_A(x), M_B(x)\right] =$$

$$0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.5/x_3 + 0.3/x_4 + 0.1/x_5$$



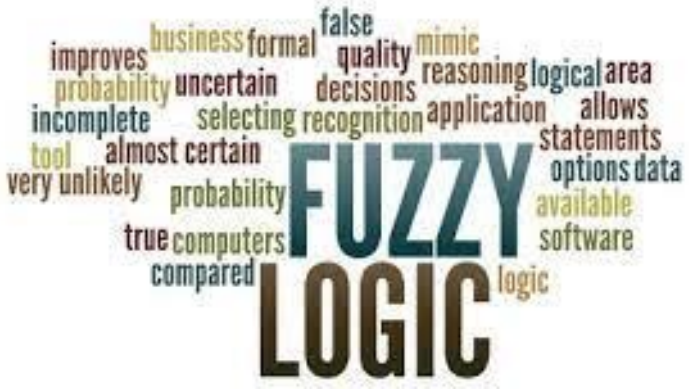
أ.د. عمر صابر قاسم م.د.فاطمة محمود حسن

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات

٢٠٢٣-2022

You never fail until you stop trying



Dr. Omar Saber Qasim Dr.Fatima Mahmood Hasan
College of computer science and mathematics
Department of mathematics