إذا كان X متغير متقطع له دالة كتلة احتمال

فإننا نقول إن X يتبع توزيع بوسون بالمعلمة λ

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

حيث $x = 0, 1, 2, \dots$ ، $e = 2.7$

$\lambda = np$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$e^{\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right]$

$$\frac{\lambda^x}{x!} = \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right)$$

مبرهنة: يقترب توزيع ذي الحدين من توزيع بوسون عندما $(p \to 0, n \to \infty)$

البرهان:

$n - (x-1)$

$n - x + 1$

$$C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x} \cdot \frac{(n-x)!}{(n-x)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{n^x\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x+1}{n}\right)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

26

مثال: اذا كان معدل ورود المكالمات الهاتفية في الدقيقة الواحدة معين هو ٢ مكالمة ما هو احتمال الحصول:

١- اكثر من ثلاث مكالمات في تلك الدقيقة بين الساعة التاسعة صباحاً والعاشرة صباحاً

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\quad x=0,1,2,\cdots \qquad \lambda=2$$

$\lambda=2$

$$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+\cdots$$

نأخذ الشيء الذي لم يظهر

$$=1-P(X\leq 3)$$

$$=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$$

$$=1-\left[\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}+\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}+\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}+\frac{2^3\cdot e^{-2}}{3!}\right]$$

$$=1-\left[e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}+\frac{4}{3}e^{-2}\right]=1-\frac{19}{3}e^{-2}$$

$$=1-6.333e^{-2}$$

ويمكن حله بطريقة اخرى:

$$1-e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{3}\frac{\lambda^x}{x!}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= 1 - e^{-2}\left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right] = 1 - 6.333\,e^{-2}$$

مثال (٤): في عملية تصنيع مواد زجاجية تظهر بين حين وآخر تشوهات او فقاعات تجعل القطعة الزجاجية غير مقبولة للتسويق فاذا كان معروفاً ان متوسط وجود واحدة من بين كل الف قطعة تحوي على فقاعة واحدة على الاقل ما احتمال وجود:

١- اقل من سبع قطع تحوي كل منها على فقاعات في عينة عشوائية حجمها ثمانية آلاف قطعة

٢- ما هو احتمال على الاكثر قطعة واحدة تحوي على فقاعات.

$$1)\ P(X<7) = P(X=6)+P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{6}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\lambda = np \qquad p = \frac{1}{1000}\ ,\ n = 8000$$

$$\therefore \lambda = (8000)\frac{1}{1000} = 8$$

$$= e^{-8}\left[\frac{8^0}{0!} + \frac{8}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!} + \frac{8^5}{5!} + \frac{8^6}{6!}\right]$$

$$=$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2- $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= e^{-8} \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-8} \left[\frac{8^0}{0!} + \frac{8}{1!} \right] = 9e^{-8}$$

مثال (3): اذا علمت ان نسبة المدخنين في مدينة ما مصابين بسرطان الرئة هي 0.4% وعلمت ان المدينة تحتوي على 1000 شخص مدخن في تلك المدينة ما احتمال وجود:

1- شخص واحد مصاب

2- اكثر من شخص واحد مصاب

3- على الاكثر ثلاثة اشخاص مصابين

الحل:

1- $n = 1000 \quad p = 0.4\% = 0.004$

$0.4 \times \frac{1}{100}$

$$\lambda = np = (1000)(0.004) = 4$$

$$P(X=1) = \frac{4 e^{-4}}{1!} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} = \frac{4}{53.144} = 0.075$$

2- $P(X>1) = 1 - P(X \le 1)$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)$$

$$= 1 - \left[\frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} \right] = 1 - 5e^{-4}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

-28

$$3-P(X\leq 3)=P(x=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$\frac{4^0 e^{-4}}{0!}+\frac{4^1 e^{-4}}{1!}+\frac{(4)^2 e^{-4}}{2!}+\frac{(4)^3 e^{-4}}{3!}$$

$$=e^{-4}+4e^{-4}+\frac{16}{2}e^{-4}+\frac{64}{6}e^{-4}$$

$$=13e^{-4}+\frac{64}{6}e^{-4}=\frac{78+64}{6}e^{-4}=\frac{142}{6}e^{-4}$$

$$=\therefore 23.66\ e^{-4}$$

مثال :- لو حظ في منطقة معينة ان من بين كل ١٠٠٠ شخص هناك شخص واحد مصاب بمرض معين ما. اوجد احتمال ان من بين ٣٠٠٠ شخص هناك ثلاث اشخاص مصابين.

ملاحظة :- متى يقال احتمال معلوما $P(x)$ متى يقال فترة او حجم او مساحة معينة معلوما توزيع بواسون

$$P(X=3)=\sum_{x=3}^{3}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \lambda=nP=1000\times\frac{1}{1000}=1$$

$$=\frac{2^3 e^{-2}}{3!}=e^{-2}\left[\frac{8}{3\times 2}\right]=\frac{4}{3}e^{-2}$$

$$\lambda=2000\times\frac{2}{2000}=2$$

-28- مثال:- لوحظ ان هناك بالمعدل 2 بكتريا كل م٣ من الماء مأخوذ من منبع معين فكيف نموذج من الماء وذلك المنبع جيد ؟

احسب :

① ان يحتوي هذا النموذج 0 بكتريا.

$\lambda = np = 2 \cdot 2 = 4$

$P(X \le 5)$

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$$\frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} + \frac{4^3 e^{-4}}{3!} + \frac{4^4 e^{-4}}{4!} + \frac{4^5 e^{-4}}{5!}$$

$$e^{-4}\left[1 + 4 + \frac{16}{2} + \frac{64}{6} + \frac{4^4}{4\times3\times2} + \frac{4^5}{5!}\right]$$

$$= 0.784$$

② على الاقل 4 بكتريا.

$$P(X \ge 4) = P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \frac{4^4 e^{-4}}{4!} + \frac{4^5 e^{-4}}{5!}$$

$$= e^{-4}\left[\frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right] = \underline{0.567}$$

0.35165