التباين :-

ان العزم المركزي يسمى التباين ويرمز له $V(X)$ ويعبر عنه رياضيا

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= EX^2 - M^2$$

خواص التباين :-

1) $V(a) = 0$

2) $V(aX) = a^2 V(X)$

3) $V(aX+b) = a^2 V(X) + 0$

a, b ثوابت

مثال :-

جد تباين المتغير الذي له دالة كثافة احتمال معرفة بالشكل الاتي :

$$f(x) = 2x \qquad 0 \le x \le 1$$

الحل :-

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX = \int_0^1 x\,(2x)\,dx$$

$$EX = 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 0\right] = \frac{2}{3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$E x^2 = \int_0^1 x^2 (2x)\,dx = 2\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 2\left[\frac{1}{4} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

برهنة ١ - اثبت ان التوقع الرياضي لتوزيع ذي الحدين يساوي np.

البرهان :

$$E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, p(x=x)$$

(بدل توزيع ذي الحدين متقطع فنأخذ Σ)

$$= \sum_{x=0}^{n} x\, C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\, \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\, \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} p^{x+1-1} q^{n-x}$$

$$p^1 \cdot p^{x-1}$$

$$= np \left\{ \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{(x-1)} q^{n-x} \right\} = 1$$

$$\therefore E(x) = np$$

التوضيح :

Let $x-1 = y$ $\quad x = y+1$

$n-1 = m$

$(n-x)! = (m-y)!$ $\quad n-1 = m \;\; m+1-y = m \;\; (m-y)!$

$$= np \left\{ \sum \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y q^{(m-y)} \right\} = 1 \quad \Sigma = np$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

39- برهنة: اثبت ان التباين لتوزيع ذي الحدين يساوي npq

ملاحظة: منت نحل اول شي نكتب برهان التوقع الرياضي وبعدها نرجع نبرهن تكملة الحل

$$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = E(x(x-1)+x)$$

$$Ex(x-1) = \sum_{x=0}^{n} \overbrace{x(x-1)}^{x(x-1)} C_x^n p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^{x+2-2} q^{n-x}$$

$$= np^2(n-1)\left\{\sum_{x=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}\right\} = 1$$

$x-2 = y$
$n-2 = m$
$(n-x)! = (m-y)!$
$n-(y+2)$
$n-y = +2$
$m+2-y = +2$

$$E(x(x-1)) = np^2(n-1) = n^2p^2 - np^2$$

$$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = Ex(x-1) + Ex$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np$$

$$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np$$

$$= np(1-p) \Rightarrow V(x) = npq$$

$p+q=1 \Rightarrow q = 1-p$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

برهنة : اثبت ان التوقع الرياضي والتباين لتوزيع بوسون يساوي λ.

البرهان :

$$E(X) = \sum x p(x=x)$$

$$= \sum x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \sum x \frac{\lambda^{x+1-1} e^{-\lambda}}{x(x-1)!} = \lambda^1 e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$\therefore \sum \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{\lambda}$$

$$\therefore E(X) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

: التوقع الرياضي لبوسون

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$E(X(X-1)+X)$

$$EX^2 = EX(X-1) + EX$$

$$EX(X-1) = \sum X(X-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \sum x(x-1) \frac{\lambda^{x+2-2} e^{-\lambda}}{x(x-1)(x-2)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$EX^2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\boxed{V(X) = \lambda}$$

: التباين لبوسون

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة 1 - اثبت ان التوقع الرياضي لتوزيع برنولي = p

البرهان :-

$$E(X) = \sum x P(x=x)$$

$$= \sum x p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= 0 + 1p^1(1-p)^{1-1} = 0 + p(1-p)^0 = p$$

(قيمة احتمالية برنولي 1،0)

مبرهنة : اثبت ان التباين لتوزيع برنولي = pq

البرهان :

برنولي $x = 0, 1$

$0 + 1p^1(1-1)^0$

$= p$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum x^2 p^x (1-p)^{1-x}$$

$$EX^2 = p$$

$$V(X) = EX^2 - E(X)^2$$

$$= p - p^2$$

$$V(X) = p(1-p) \qquad [p+q=1]$$

$$V(X) = pq$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التوزيعات الاحتمالية المستمرة :

هنالك العديد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة واحد منها هو التوزيع الاسي وهو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة وهو توزيع احتمالي للمتغير العشوائي x وأخذ القيم $x \geq 0$ وله دالة كثافة احتمال معرفة بالشكل الاتي

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

خواص التوزيع الاسي

1) $f(x) > 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \, dx = 1$

مبرهنة : اثبت ان التوقع الرياضي للتوزيع الاسي يساوي $\frac{1}{\lambda}$ ،

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

البرهان :

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx \quad \text{(تكامل } u\,dv\text{)}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner