نفرض

$u = x \Longrightarrow dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$du = dx \quad v = -e^{-\lambda x}$

$$\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = uv - \int v\,du$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} dx$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty$$

$$= 0 - \left[0 - \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

$\therefore Ex = \frac{1}{\lambda}$

مبرهنة: اثبت ان التباين للتوزيع الاسي $= \frac{1}{\lambda^2}$

البرهان:

$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$

$$Ex^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$u = x^2 \quad dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$du = 2x\,dx \quad v = -e^{-\lambda x}$

$$= uv - \int_0^\infty v\,du$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - 2\int_0^\infty -x e^{-\lambda x} dx$$

$0 =$

$u = x \quad dv = -e^{-\lambda x} dx$

$du = dx \quad v = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$$Ex^2 = 2\left[x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx\right]$$

$$= -2\left[-\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right]_0^\infty\right] = -2\left[0 - \frac{1}{\lambda^2}\right] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(x) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التوزيعات الاحتمالية المستمرة :

هنالك العديد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة وأهم منها هو التوزيع الاسي وهو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة وهو توزيع احتمالي للمتغير العشوائي x يأخذ القيم $x \geq 0$ وله دالة كثافة احتمال معرفة بالشكل الاتي

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

خواص التوزيع الاسي

1) $f(x) > 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \, dx = 1$

مبرهنة : اثبت ان التوقع الرياضي للتوزيع الاسي يساوي $\frac{1}{\lambda}$.

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

البرهان :

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$ (تكامل بالتجزئ)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نفرض

$u = x \Longrightarrow dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$du = dx \quad v = -e^{-\lambda x}$

$$\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = uv - \int v\,du$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} dx$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty$$

$$= 0 - \left[0 - \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

$\therefore Ex = \frac{1}{\lambda}$

مبرهنة: اثبت ان التباين للتوزيع الاسي $= \frac{1}{\lambda^2}$

البرهان:

$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$

$$Ex^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$u = x^2 \quad dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$du = 2x\,dx \quad v = -e^{-\lambda x}$

$= u \cdot v - \int_0^\infty v\,du$

$= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - 2\int_0^\infty -x e^{-\lambda x} dx$

$0 =$

$u = x \quad dv = -e^{-\lambda x} dx$

$du = dx \quad v = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$$Ex^2 = 2\left[x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx\right]$$

$$= -2\left[-\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right]_0^\infty\right] = -2\left[0 - \frac{1}{\lambda^2}\right] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(x) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Hq

مبرهنة: اثبت ان التوقع الرياضي للتوزيع الطبيعي القياسي يساوي صفر.

البرهان:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

ملاحظة:

$$\int_{-\infty}^{0} = -\int_{0}^{\infty}$$

$$= -\int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$\therefore E(X) = 0$

مبرهنة: اثبت ان التباين للتوزيع الطبيعي القياسي يساوي 1.

البرهان:

$$V(X) = EX^2 - (E(X))^2$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{x e^{\frac{1}{2}x^2} dx}_{dv}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

48

$u = x \quad , \quad dv = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$du = dx \quad , \quad v = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$= uv - \int_{-\infty}^{\infty} v\, du$

$= -x e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx$

$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx$

$= 1$ من الخواص

$EX^2 = 0 + 1 = 1$

$V(X) = E(X^2) - (EX)^2$

$= 1 - 0 = 1$

ملاحظة: التوزيع الطبيعي القياسي

$EX = 0$

$V(X) = 1$

التوزيع الطبيعي

$E(X) = \mu$

$V(X) = \sigma^2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة : اثبت ان التوقع الرياضي للتوزيع الطبيعي يساوي μ

البرهان :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نفرض ان

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow Z\sigma = x - \mu \Rightarrow$$

$$x = Z\sigma + \mu$$

$$dx = \sigma\, dZ$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (Z\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \cdot \sigma\, dZ$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$= \sigma(0) + \mu(1)$$

$$E(X) = \mu$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner