مبرهنة :- اثبت ان التباين للتوزيع الطبيعي يساوي σ^2.

البرهان :-

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نفرض ان $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma Z = x - \mu$

$$\Rightarrow x = \sigma Z + \mu$$

$$dx = \sigma\, dz$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} (\sigma Z + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}Z^2} \cdot \sigma\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (Z^2\sigma^2 + 2\sigma Z\mu + \mu^2) e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Z\, e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz$$

$$+ \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz$$

$$E(X^2) = \sigma^2(1) + 0 + \mu^2(1)$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ توزيع كاما :

يعد هذا التوزيع من التوزيعات العامة التي تضمن اكثر من توزيع واحد كحالات خاصة وله دالة كثافة احتمال معرفة بالشكل الاتي :

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma\alpha}$$

$$\Gamma\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

خواص كاما :

1) $\Gamma(n+1) = n!$

2) $\Gamma\alpha = (\alpha-1)!$ $\Gamma 4$

3) $\Gamma(n+1) = n\Gamma n$

مبرهنة : اثبت ان $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

البرهان :

$$\Gamma\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma\frac{1}{2} = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نفرض ان

$$x = \frac{1}{2}z^2 \qquad dx = z\,dz$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}z^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} z\,dz$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (z^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} z\,dz$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{-1} e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot z\,dz$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

نوجد

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \sqrt{2\pi}\sqrt{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= 2\sqrt{\pi} \underbrace{\left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right\}}_{=\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دالة توليد العزوم :-

نعرف دالة توليد العزوم بالشكل الاتي :-

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

حيث x متغير و $-\infty < t < \infty$

ملاحظة :-

للسهولة سوف نكتب دالة توليد العزوم بالشكل الاتي :-

$$M(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \int e^{tx} f(x)\,dx \\ \sum e^{tx} P(X=x) \end{cases}$$

مبرهنة :- اثبت ان

$$E(X) = \frac{d\,M(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

البرهان :-

$$M(t) = E(e^{tx})$$

$$= E\left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= E(1) + tE(X) + \frac{t^2}{2!}E(X)^2 + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \cdots$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$M(t) = t\,E(x) + \frac{t^2}{2!}E(x^2) + \frac{t^3}{3!}E(x^3) + \cdots$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = E(x) + \frac{2t}{2!}E(x^2) + \frac{3t^2}{3!}E(x^3) + \cdots$$

$0 \quad\quad 0$

نعوض $t=0$

$$\frac{dM(t)}{dt} = Ex$$

(Q

$$\left.\frac{dM^2t}{dt}\right|_{t=0} = Ex^2$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = E(x) + \frac{2t}{2!}E(x^2) + \frac{3t^2}{3!}E(x^3) + \cdots$$

$$\frac{dM^2(t)}{dt} = \frac{2}{2!}E(x^2) + \frac{6t}{3!}Ex^3 + \cdots$$

0

نعوض $t=0$

$$\frac{dM^2(t)}{dt} = Ex^2$$

$$E(x) = \frac{dM(t)}{dt} = E(x) +$$

$$M(t) = E(e^{xt})$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

46

مبرهنة: اذا كانت $y = ax + b$ فان

$$M_y(t) = e^{tb} M_x(at)$$

البرهان:

$$M_y(t) = E(e^{tb}) = E(e^{t(ax+b)})$$

$$= E(e^{tax} \cdot e^{tb}) = e^{tb} E(e^{atx})$$

$$= e^{tb} M_x(at)$$

مثال: اذا كانت $y = 5x + 10$ فان

$$M_y(t) = e^{t10} M_x(5t)$$

$$M_y(t) = E(e^{ty}) = E(e^{t(5x+10)})$$

$$= E(e^{5tx} \cdot e^{t10}) = e^{t10} E(e^{5tx})$$

$$= e^{t10} M_x(5t)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner