Sufficient Statistics: الاحصاء الكافي

تعريف كفاية الاحصاء الكافي:

حيال للمقدر $\hat{\theta}$ هو تقدير كاف للمعلمة (θ) اذا كانت هذا المقدر يحوي كافة المعلومات المستقاة من العينة فيما يخص المعلمة θ وبالتالي حيال للمقدر $\hat{\theta}$ هو تقدير كفاية اذا ارتفع اذا امكن قليل دالة الاشارة لقياسات العينة اي جامل مزيج دالتين الاولى تعتمد دالة دلالة المقدر $\hat{\theta}$ اي يجمع بين المعلمة وتقديرها والثانية دالة لا تعتمد على المعلمة θ دالة العينة اي ان:

$$L(\theta) = g(x_1, x_2 \dots x_n)\, h(\hat{\theta}, \theta)$$

ولتوضيح فحص الكفاية لكل من (μ, σ^2) لمعلمتي التوزيع الطبيعي المعتمد بالمعلمتين (μ, Σ) سوف نناقش الحالات الثلاثة لمعلمات الدكانة الاعظم.

① when Σ is know:

In this case the m.l.e for μ is $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

ودالة الدكانة تكون بالشكل الاتي:

$$L(\mu) = (2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-1}{2} tr\left[\Sigma^{-1} \sum (x_i - \mu)(x_i - \mu)'\right]}$$

ملاحظة: اعتمدنا على خاصية الاثر لسهولة الحل.

we have:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)(x_i - \mu)' = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)\right]\left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)\right]'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)\right]\left[(x_i - \bar{x})' + (\bar{x} - \mu)'\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' + (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)' + (x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu)' + (\bar{x} - \mu)(x_i - \bar{x})'\right]$$

Scanned with CamScanner

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' \right] + n(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)' + 0$$

$$\therefore L(\mu) = (2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' + n(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)' \right) \right]}$$

$$= \underbrace{(2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'}}_{h(x_1, x_2, \ldots x_n)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{n}{2} tr \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)'}}_{g(\mu, \hat{\mu})}$$

where:

$$h(x_1, x_2, \ldots x_n) = (2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'}$$

وهي دالة لا تعتمد على μ

and $g(\mu, \hat{\mu}) = e^{-\frac{n}{2} tr\left[\Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)' \right]}$

$$\therefore \hat{\mu} = \bar{x} \text{ is sufficient}$$

Q) Prove that $\bar{X}$ is sufficient estimater for μ when Σ is known.

Scanned with CamScanner

Case (2): when $\underline{\mu}$ is known

In this case the m.l.e for Σ is

$$\hat{\Sigma} = \frac{A}{n} \Rightarrow A = n\hat{\Sigma}$$

where: $A = \sum (\underline{x}_i - \underline{\mu})(\underline{x}_i - \underline{\mu})'$

$$L(\Sigma) = (2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \underline{\mu})(\underline{x}_i - \underline{\mu})'}_{A}\right]}$$

$$= (2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr[\Sigma^{-1} n \hat{\Sigma}]}$$

ملاحظة: الأثر للثابت مضروب في مصفوفة يساوي الثابت مضروب في أثر المصفوفة

$$tr(nA) = n\, tr(A)$$

أي أن

حيث أن n عدد ثابت، A مصفوفة وهيه:

$$\therefore L(\Sigma) = \underbrace{(2\pi)^{\frac{-np}{2}}}_{h(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \underbrace{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} tr[\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}]}}_{g(\Sigma, \hat{\Sigma})}$$

$$\therefore \hat{\Sigma} = \frac{A}{n} \text{ is sufficient}$$

(2) Is $\hat{\Sigma}$ considered a sufficient estimator for Σ? why?

Scanned with CamScanner

Case (3) when $\underline{\mu}$, Σ unknown:-

The m.l.e for $\underline{\mu}$, Σ are

$\hat{\underline{\mu}} = \bar{x}$, $\hat{\Sigma} = \frac{c}{n}$; $c = n\hat{\Sigma}$ where $c = \sum(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$

$$L(\underline{\mu}, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \underline{\mu})(x_i - \underline{\mu})'\right]}$$

بإضافة وطرح $\bar{x}$ وكتابة الأس الأخير داخل التتبع كما ذكر سابقاً

كما يلي:

$$L(\underline{\mu}, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1} \sum (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' + n(\bar{x} - \underline{\mu})(\bar{x} - \underline{\mu})'\right]}$$

$$= \underbrace{(2\pi)^{-\frac{np}{2}}}_{h(x_1, x_2 \dots x_n)} \underbrace{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1}(n\hat{\Sigma} + n(\bar{x} - \underline{\mu})(\bar{x} - \underline{\mu})')\right]}}_{g(\underline{\mu}, \Sigma, \hat{\underline{\mu}}, \hat{\Sigma})}$$

$$= h(x_1, x_2 \dots x_n)\, g(\underline{\mu}, \Sigma, \hat{\underline{\mu}}, \hat{\Sigma})$$

where $h(x_1 \dots x_n) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}}$

$$g(\underline{\mu}, \Sigma, \hat{\underline{\mu}}, \hat{\Sigma}) = |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} tr\left\{\Sigma^{-1}(\hat{\Sigma} + (\bar{x} - \underline{\mu})(\bar{x} - \underline{\mu})')\right\}}$$

$\therefore \hat{\underline{\mu}}, \hat{\Sigma}$ are sufficient

Scanned with CamScanner