الاشتقاق العددي من الدرجات العليا High-Order Numerical Differentiation:

سنتطرق في هذه الفقرة الى كيفية تقدير المشتقة من الدرجة الثانية فقط وبطريقة عددية . لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق بشكل مستمر على الفترة $[x-\Delta x, x+\Delta x]$ عندئذ يمكن استخدام مايسمى بامتداد تايلر taylors’s Expansion لاشتقاق الصيغة التقديرية للمشتقة الثانية للدالة $f(x)$ وكالاتي:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x f'(x)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(\Delta x)^4}{4!}f''''(x)+....$$

$$f(x-\Delta x)=f(x)+(-\Delta x)f'(x)+\frac{(-\Delta x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(-\Delta x)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(-\Delta x)^4}{4!}f''''(x)+....$$

$$\Rightarrow f(x-\Delta x)=f(x)-\Delta x f'(x)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x)-\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(\Delta x)^4}{4!}f''''(x)\pm....$$

والان بجمع المعادلتين أعلاه $f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)$ نحصل على :

$$f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)=2f(x)+2\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x)+2\frac{(\Delta x)^4}{4!}f''''(x)+...$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)=2f(x)+(\Delta x)^2 f''(x)+O\left((\Delta x)^4\right)$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}-\frac{O\left((\Delta x)^4\right)}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}-O\left((\Delta x)^2\right)$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}.....(4)$$

والصيغة الأخيرة (المعادلة رقم (4)) هي الصيغة التي سنعتمدها لتقدير قيمة المشتقة الثانية للدالة $f\left(x\right)$

علما ان مقدار الخطا الذي سنقع به عند تقدير المشتقة الثانية يكون مساو ل $O\left(\left(\Delta x\right)^2\right)$.

Example:

Estimate the value of the second derivative of the function $f\left(x\right)=2e^{1.5x}$ and then calculate the absolute and relative erorr of the estimate.

الحل بتطبيق المعادلة رقم (4) أعلاه على القيم x=3 و $\Delta x=0.1$:

$$f'\left(x=3\right)\approx\frac{f\left(x+\Delta x\right)+f\left(x-\Delta x\right)-2f\left(x\right)}{\left(\Delta x\right)^2}$$

$$=\frac{f\left(3+0.1\right)+f\left(3-0.1\right)-2f\left(3\right)}{\left(0.1\right)^2}$$

$$=\frac{f\left(3.1\right)+f\left(2.9\right)-2f\left(3\right)}{0.01}$$

$$=\frac{2e^{1.5(3.1)}+2e^{1.5(2.9)}-2\left(2e^{1.5(3)}\right)}{0.01}=405.8373$$

والقيمة الأخيرة (405.8372) هي تقدير المشتقة الثانية للدالة $f\left(x\right)$ عندما x=3 و $\Delta x=0.1$

لاحظ ان القيمة الحقيقية للمشتقة الثانية هي :

$$f'\left(x\right)=2\frac{d}{dx}e^{1.5x}$$

$$=2\left(1.5e^{1.5x}\right)=3e^{1.5x}$$

$$f'\left(x=3\right)=4.5e^{1.5\times 3}=405.0771$$

وكما هو ملاحظ فان القيمة المقدرة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للمشتقة الثانية .

وفي هذه الحالة تكون قيمة الخطا المطلق كالاتي :

$$AbsoluteError = \left|405.0771 - 405.8372\right| = 0.7601$$

Homework:

Estimate the value of the second derivative of the following function when x=2, $\Delta x = 0.1$

$$f\left(x\right) = \ln\left(2x - 1\right)$$

Then find the absolute error of the estimated solution compared to the real solution,noting that the second real derivative is as follows:

$$f''\left(x\right) = \frac{-4}{\left(2x-1\right)^2}$$