المحاضرة الرابعة

بعض الحالات الخاصة في الرسم البياني

- تعريف الطريقة البيانية لكل البرمجة الخطية بانها حل امثل وحيد الا انه تصادفنا في الحياة العملية بعض الحالات النادرة او الخاصة وهنا: -

1- تعدد الحلول المثلى The multiple optimal solution

يحصل احياناً وجود عدة حلول مثلى لمشكلة البرمجة الخطية او تحدث هذه الحالة عندما يكون احد قيود التوفر موازياً الى دالة الهدف (ح) او منطبقاً عليها، وكما موضح في المثال التالي

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.t.

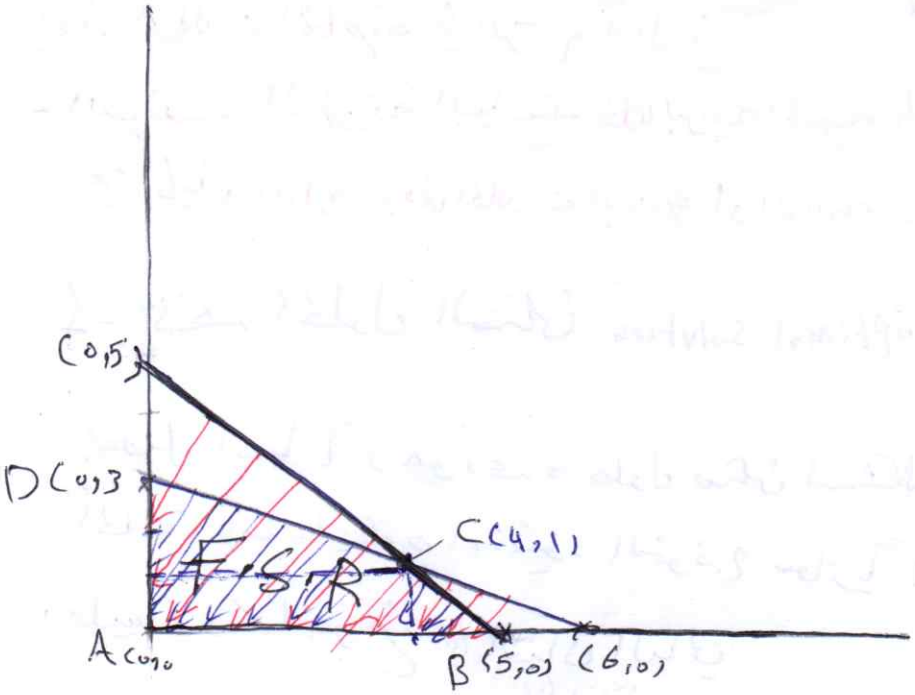
$$2X_1 + 4X_2 \leq 12$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

لدينا مثالقيد الاول

$$2X_1 + 4X_2 = 12$$
if $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$; $P_1(0,3)$
if $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 6$; $P_2(6,0)$

القيد الثاني

$$X_1 + X_2 = 5$$
if $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$; $P_1(0,5)$
if $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$; $P_2(5,0)$



يتضح من الشكل البياني السابق ان منطقة الحل الممكن F.S.R محدد بالنقاط (A, B, C, D) ولايجاد احداثيات نقاط الحدين والنقطة C كونها تقع لمنطقة الحل الممكن نحل المعادلتين آنياً

$$2X_1 + 4X_2 = 12 \quad \text{---} (1)$$

$$2*(X_1 + X_2 = 5) \quad \text{---} (2)$$

نضرب (2) في 2

$$2X_1 + 4X_2 = 12$$

$$-2X_1 - 2X_2 = -10$$

$$0 + 2X_2 = 2$$

بالطرح

$$\therefore X_2 = 1$$

نفوض قيمة ($X_2 = 1$) في المعادلة (1) $\Leftarrow$

$$2X_1 + (4*1) = 12$$

$$\therefore X_1 = 4$$

$\therefore$ احداثيات النقطة C هي (4, 1)

ولاختبار امثلية النقاط ابجد قيمة دالة الهدف Z عند النقاط الركنية لمنطقة الحل الممكن وكما يلي الجدول الآتي

النقاط المتطرفة	دالة الهدف $Z = 2X_1 + 4X_2$	الحل الامثل
$A_{(0,0)}$	$Z_{(0,0)} = 2*0 + 4*0 = 0$	
$B(0,3)$	$Z_{(0,3)} = 2*0 + 4*3 = 12$	$Z_B = 12^*$
$C(4,1)$	$Z_{(4,1)} = 12$	$Z_C = 12^*$
$D(5,0)$	$Z_{(5,0)} = 10$	

يتضح من النتائج اعلاه وجود اكثر من حل امثل للمشكلة متمثلاً بالنقطتين $B(0,3)$ و $C(4,1)$ وذلك لتساوي قيمة دالة الهدف عندهاتين النقطتين.

ويعود سبب فقدان الحل الامثل لهذا المثال بسبب انطباق القيد الاول على الحد Z على دالة الهدف Z.

2- عدم وجود حلول مقبولة Infeasible Solution

تحدث هذه الحالة عندما تكون قيود مشكلة البرمجة الخطية متعارضة (متعاكسة) ، ولا تشكل منطقة مشتركة بسبب عدم تقاطعها مما يؤدي ذلك الى عدم الحصول على حلول مقبولة للمشكلة وكما موضح في المثال الآتي .

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$$

S.t.

$$2X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

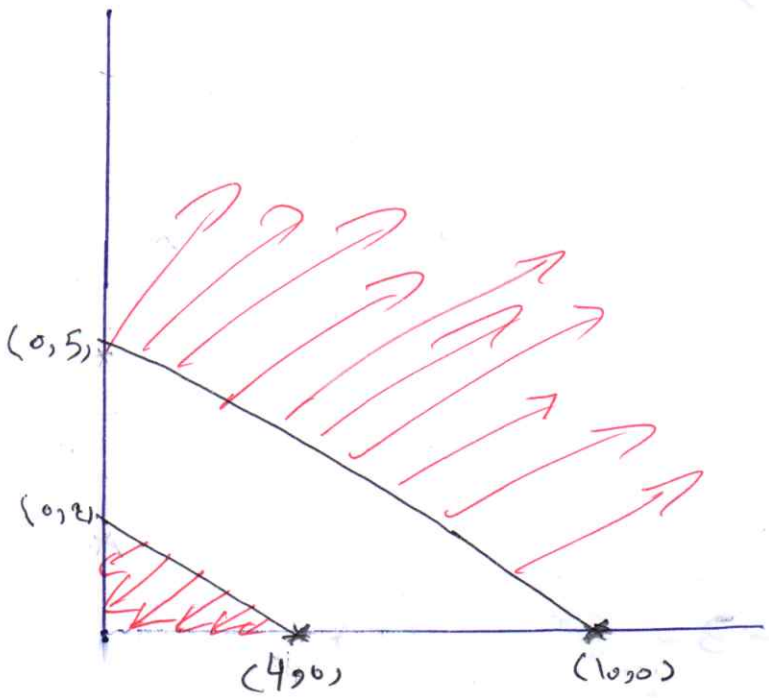
الحل :- لايجاد القيد الاول النقاط

$P_1(0,5)$, $P_2(10,0)$

و القيد الثاني

$P_1(0,2)$, $P_2(4,0)$

وعليه يكون الرسم البياني بالشكل



بما انه لاتوجد منطقة مشتركة للقيود بالرسم البياني اذن لا يوجد حل ممكن وعليه لا يوجد حل امثل للمشكلة

لان هذه القيود متعاكسة القيد الاول عكس نقطة الاصل القيد الثاني باتجاه نقطة الاصل

3- الحلول المنحلة المفككة (The Degenerate Solution)

يعد حل مشكلة البرمجة الخطية حلاً منحلاً او مفككاً اذا كانت قيمة احد المتغيرات الاساسية أو اكثرها مساوية للصفر وان عدد المتغيرات الاساسية يكون اقل من عدد القيود والمثال الآتي يوضح ذلك:

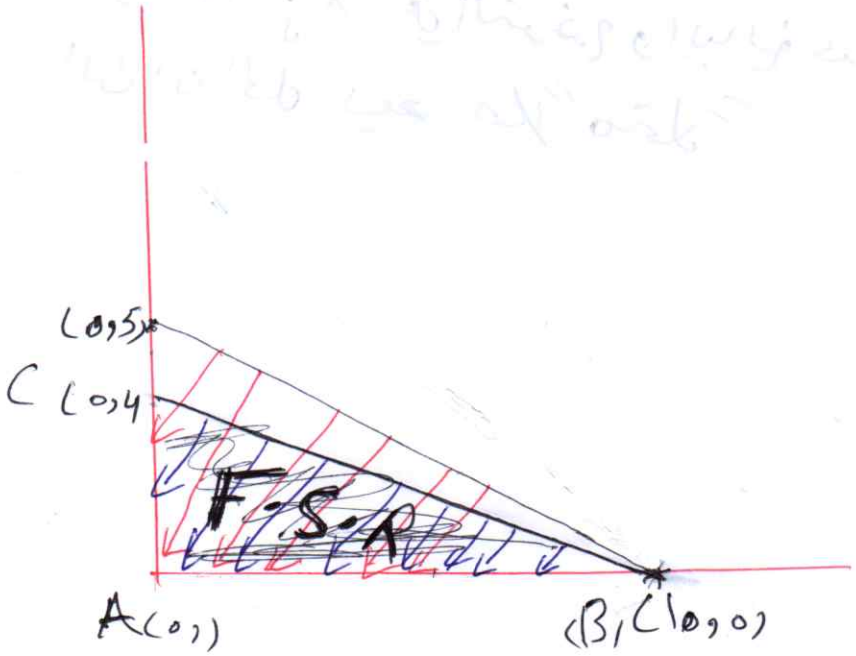
$$\text{Max } Z = 6X_1 + 8X_2$$

S.t.

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + 5X_2 \leq 20$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل لدينا من الشكل الاول النقطتان $P_1(0,5)$ و $P_2(10,0)$

ومن الشكل الثاني النقطتان $P_1(0,4)$ و $P_2(10,0)$



يتضح من الشكل البياني السابق ان منطقة الحل الممكن F.S.R محدد بالنقاط (A, B, C) ولاختبار امثلية النقاط نقوم بايجاد قيمة دالة الهدف عند النقاط A, B, C

النقاط	دالة الهدف Z $Z=6X_1+8X_2$	الحل الامثل
$A(0,0)$	$Z_{(0,0)}=0$	
$B(10,0)$	$Z_{(10,0)}=60$	60^*
$C(0,4)$	$Z_{(0,4)}=32$	

نتبع من التابع اعلاه بان الحل الامثل للمشكلة تحققه النقطة $B(10,0)$ مما يجعل الحل يعد جيدا هو $X_1^*=10$, $X_2^*=0$ وبما ان عدد المتغيرات الاساسية في الحل الامثل هو متغير واحد فقط ($X_1=10$) هو اقل من عدد المتغيرات القرارية X_j في النموذج والبالغ عددها متغيرين، وهذا مايشير الى ان الحل يعد حلا "متحلا"

4- الحلول غير المحدودة The unbounded Solutions

تعد مشكلة البرمجة الخطية غير المحدودة نادرة الحدوث نظراً لكون اغلب المشاكل محددة الحلول (لمحاصل اشكال وصيد) في الحياة العملية، والمثال التالي يوضح ذلك

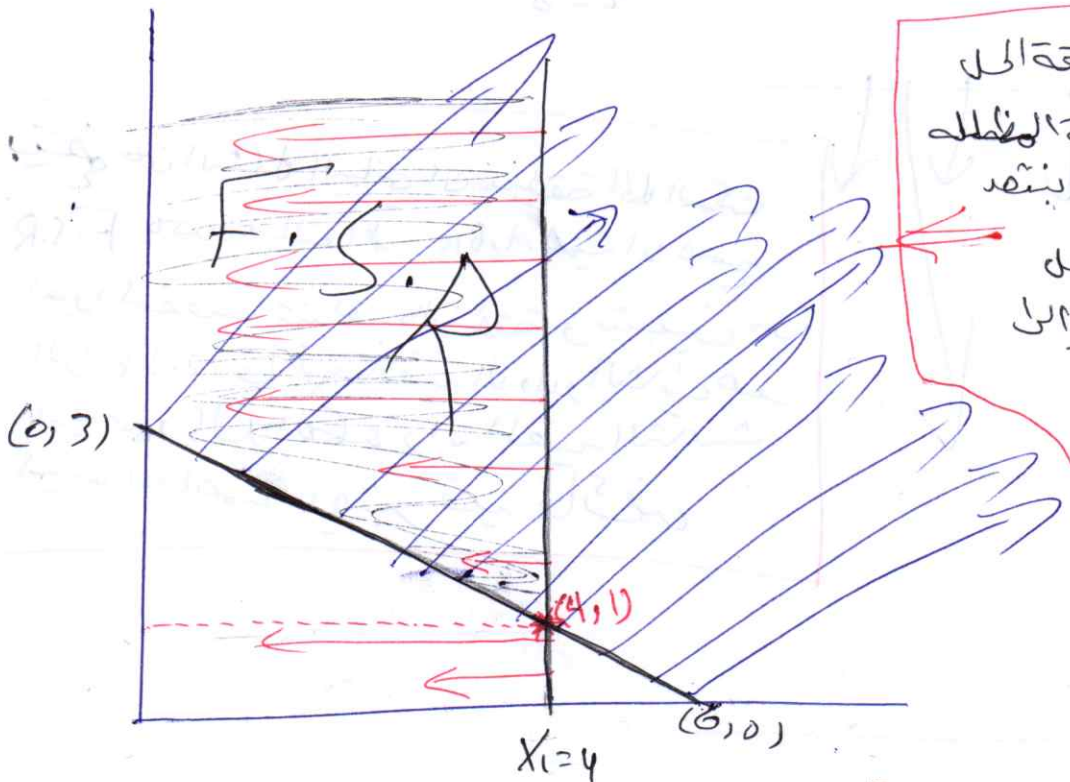
$$Max \; Z = 10X_1 + 15X_2$$

s.t.

$$X_1 + 2X_2 \geq 6$$
$$X_1 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل لدينا نقطتين $P_1(0,3)$ و $P_2(6,0)$

ولدينا نقطة تقاطع الخط الثاني $X_1 = 4$



يتضح من الشكل البياني ان منطقة الحل المحتمل F.S.P تتمثل بالمنطقة المظللة وهي منطقة مفتوحة اذ كلما يتقدم في نقطة الاصل سنحصل على حل افضل من السابق مما سيؤدي الى الحصول على حل غير محدد، اي انه لا نهاية من الحلول

5 - وجود قيود فائضة The Redundancy constraint

- يحدث احياناً وجود قيد او عدد من القيود في نموذج L.P فائضة - وليس لها اهمية او تأثير يذكر على F.S.R. للمشكلة ، ولمعالجة هكذا نوع من المشاكل - ينبغي على متخذ القرار حذف القيود التي يراها غير ضرورية في النموذج وليس لها تأثير في تحديد منطقة الحل الممكن وكما موضح في المثال التالي

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 6x_2$$

S.t.

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_2 \leq 8$$

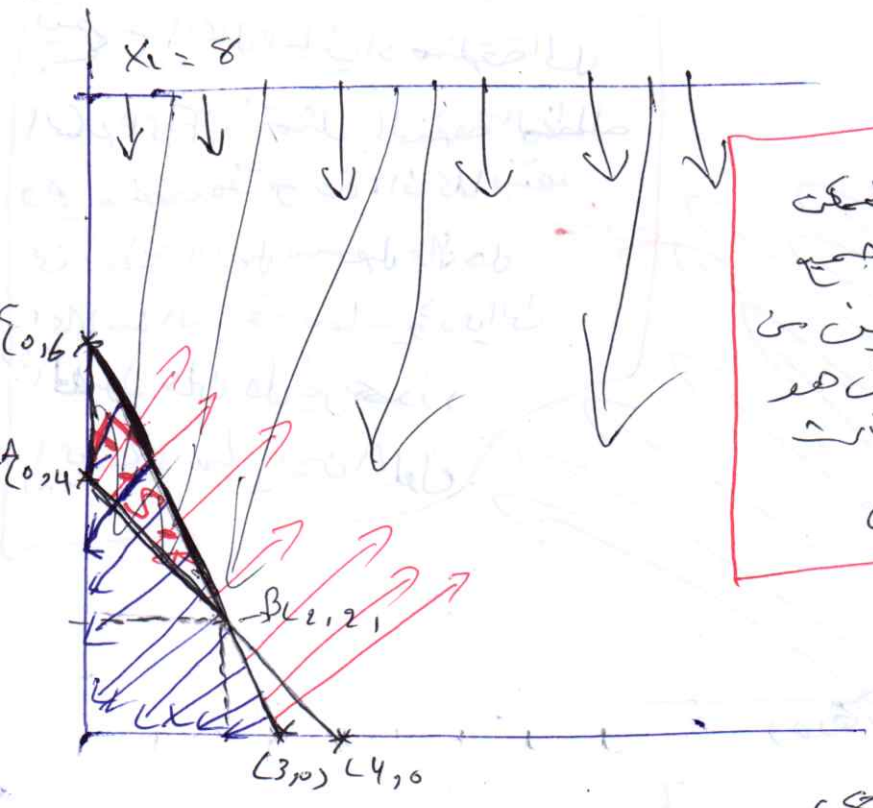
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: لدينا من القيد الاول

النقطتان $P_1(0,4)$ و $P_2(4,0)$

- لدينا من القيد الثاني النقطتان $P_1(0,6)$ و $P_2(3,0)$

- لدينا من القيد الثالث $x_2 = 8$



يتضح من الشكل البياني ان منطقة الحل الممكن F.S.R محدده بالنقاط A,B,C حيث ان جميع القيود تحققت عند هذه المنطقة ويتبين من الرسم ان تقاطع القيد الاول والثاني هو الذي حدد الحل الممكن وان القيد الثالث ليس له اهمية يعتبر قيد فائض

النقاط	$Z = 3x_1 + 6x_2$	الحل الأمثل
$A(0,4)$	$Z(0,4) = 24$	
$B(2,2)$	$Z(2,2) = 18^*$	18^*
$C(0,6)$	$Z(0,6) = 36$	

$x_1^* = 2$

$x_2^* = 2$

$Z^* = 18$