Dual Simplex Method — طريقة السمبلكس المقابلة

احد الفرضيات الاساسية للانموذج الاولي بوساطة طريقة السمبلكس هي ان الموارد (ضمن الجانب الايمن للقيود) يجب ان تكون اكبر من الصفر / حل الانموذج المقابل بوساطة طريقة السمبلكس يساعد على التخلص من هذا الشرط حيث ان قيمة الموارد ممكن ان تكون سالبة وعلى هذا الاساس فلا حاجة لتدوين المتغيرات الاصطناعية الى الانموذج / تتلخص طريقة السمبلكس المقابلة بالخطوات الآتية :-

1- المتغير الخارج هو المتغير الاساسي الذي يقابل القيمة الأكثر سالبية في عمود b

2- المتغير الداخل ينتج من حاصل قسمة صف الـ Z النسبية على صف المحور وتتم القسمة على القيم السالبة فقط ويتم اختيار اقل قيمة لتمثل المتغير الداخل .

3- الحل الامثل للانموذج يتم الوصول اليه عندما تكون كل قيم عمود b موجبة

- الطريقة الموصوفة في الخطوات السابقة تستخدم لحل النموذج البرمجة الخطية (L.P) عندما تكون معاملات متجه الموارد (b) سالبة

EX(1) اوجد الحل الامثل للنموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة Dual Simplex السمبلكس المقابل للنموذج المقابل

Primal Max $Z = 20X_1 + 25X_2$

s.t.

$2X_1 + 3X_2 \leq 40$

$X_1 + 2X_2 \leq 20$

$3X_1 + X_2 \leq 30$

$X_1, X_2 \geq 0$

⟹ Dual Model

Min $T = 40Y_1 + 20Y_2 + 30Y_3$

s.t.

$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \geq 20$

$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 25$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

- لتطبيق طريقة السمبلكس المقابل (Dual Simplex) - يجب تحويل اشارة القيود الى (اصغر او يساوي) وجعل قيم متجه الموارد (b) بسالبة وذلك بضرب طرفي القيود (-1)

القيود

$-2Y_1 - Y_2 - 3Y_3 \leq -20$

$-3Y_1 - 2Y_2 - Y_3 \leq -25$

ويتم تحويل الانموذج المقابل الى الصيغة القياسية

$$Min\ T = 40Y_1 + 20Y_2 + 30Y_3 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t.

$$-2Y_1 - Y_2 - 3Y_3 + S_1 = -20$$

$$-3Y_1 - 2Y_2 - Y_3 + S_2 = -25$$

$$X_1, X_2, Y_3, S_1, S_2 \geq 0$$

Dual Simplex Table

	C_j	40	20	30	0	0	
C_B	B.V.	Y_1	Y_2	X_3	S_1	S_2	b_j
0	S_1	-2	-1	-3	1	0	-20
0	S_2	-3	-2	-1	0	1	-25
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	40	20	30	0	0	

نختار المتغير الخارج اولاً (المتغير الأكثر سالبية)

صف الارباح النسبية

في حالة تساوي السالبيات نختار اولاً المتغير الخارج الذي يقابل القيمة الأكثر سالبية وهنا S_2 هو الأكثر سالبية

ولتحديد المتغير الداخل نقسم صف الارباح النسبية $(C_j - Z_j)$ على صف المحور (صف المتغير الخارج) وباستخدام عملية المحور نحصل على جدول جديد

$$C_j - Z_j = [\ 40 \quad 20 \quad 30 \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$S_2 = [\ -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1\ ]$$

$$\frac{C_j - Z_j}{S_2} = \frac{-40}{3} \quad \frac{-20}{2} \quad \frac{-30}{1}$$

(-13.33) (-10) (-30)

نختار القيمة الاقل والتي تقابل S_2 = -10

نستخدم العمليات الصفية والمتغير المحوري يجب ان يكون 1

$$R_2^* = \frac{R_2}{-2} \quad ; \quad R_1^* = R_1 - (-1 * R_2^*)$$

∴ المتغير الخارج هو S_2 والداخل هو Y_2

C_B	B.V.	C_j	40	20	30	0	0	b_j
			Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	
0	S_1		$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{2}$
20	Y_2		$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{25}{2}$
Z_j			30	20	10	0	-10	250
$C_j - Z_j$			10	0	20	0	10	

هذا الجدول لا يمثل حل ممكن لان قيمة متغير الاساس تساوي قيمة سالبة وبذلك فان S_1 تمثل المتغير الخارج

وبقسمة صف الارباح النسبية على صف المحور نحصل على

$C_j - Z_j = [10 \quad 0 \quad 20 \quad 0 \quad 10]$

صف المحور (صف S_1) $= [-\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{5}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2}]$

$\frac{C_j - Z_j}{\text{صف } S_1} = [-20 \quad \text{نعمل} \quad -8 \quad \text{نعمل} \quad -20]$

$R_1^* = \frac{R_1}{-5/2} = -\frac{2}{5} R_1 \quad ; \quad R_2^* = R_2 - \frac{1}{2} R_2^*$

C_B	B.V.	C_j	Y_1	Y_2	Y_3	0	0	b_j
30	Y_3		$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	3
20	Y_2		$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	11
Z_j			34	20	30	-8	-6	T=310
$C_j - Z_j$			-4	0	0	8	6	

$T^* = 310$

$Y_1^* = 0 \; ; \; Y_2^* = 11 \; , \; Y_3^* = 3$

للمقابل

من جدول الحل الامثل نجد ان قيم الحل الامثل للمتغيرات الاولية هي $Z^* = T^* = 310$

وقيم X_1, X_2 نجدها من تحت متغيرات الفائض S_1, S_2 في صف التقليل

$X_1^* = 8 \; ; X_2^* = 6$

ج) اذا كان لديك التمرين التالي

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$$

s.t.

$$2X_1 + 3X_2 \leq 3$$
$$8X_1 + 4X_2 \leq 5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

والمطلوب:

1 - ايجاد التوضيح المقابل لهذا التمرين في الدول
2 - حل النموذج الدول بالطريقة السمبلكس الاعتيادية
3 - حل النموذج المقابل بالطريقة السمبلكس الاعتيادية
4 - حل المخطط المقابل بالطريقة السمبلكس الاعتيادية

Sol^n

(1)

Primal

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$$
s.t.
$$2X_1 + 3X_1 \leq 3$$
$$8X_1 + 4X_2 \leq 5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } T = 3Y_1 + 5Y_2$$
s.t.
$$2Y_1 + 8X_2 \geq 40$$
$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 50$$
$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

(2) $\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2 + 0S_1 + 0S_2$

s.t.

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 3$$
$$8X_1 + 4X_2 + S_2 = 5$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

	C_j	40	50	0	0		
C_B	B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	b	Ratio
0	S_1	2	3	1	0	3	3/3
0	S_2	8	4	0	1	5	5/4
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	40	50	0	0		

نازل

داخل

$\frac{R_1}{3}$

$$R_1^* = \left[\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 1\right]$$

نازل

$$R_2 = [8 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 5]$$
$$4R_1^* = \left[\frac{8}{3} \quad 4 \quad \frac{4}{3} \quad 0 \quad 4\right]$$

$$R_2^* = \left[\frac{16}{3} \quad 0 \quad -\frac{4}{3} \quad 1 \quad 1\right]$$

C_j		40	50	0	0	
C_B	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	b
50	X_2	2/3	1	1/3	0	1
0	S_2	16/3	0	-4/3	1	1
	Z_j	100/3	50	150/3	0	50
	$C_j - Z_j$	20/3	0	-50/3	0	

Ratio: 3/2 = 1.5; 2/3 ← 2/6; 3/16 = 0.1875

$$R_2^* = \frac{R_2}{16/3} = \frac{3}{16} R_2 = [\,1 \;\; 0 \;\; -\tfrac{1}{4} \;\; \tfrac{3}{16} \;\; \tfrac{3}{16}\,]$$

$$R_1 = [\,\tfrac{2}{3} \;\; 1 \;\; \tfrac{1}{3} \;\; 0 \;\; 1\,]$$

$$\tfrac{2}{3} R_2^* = [\,\tfrac{2}{3} \;\; 0 \;\; -\tfrac{2}{12} \;\; \tfrac{1}{8} \;\; \tfrac{2}{16}\,]$$

$$R_1^* = [\,0 \;\; 1 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; -\tfrac{1}{8} \;\; \tfrac{7}{8}\,]$$

C_j		40	50	0	0	
C_B	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	b
50	X_2	0	1	1/2	-1/8	7/8
40	X_1	1	0	-1/4	3/16	3/16
	Z_j	40	50	15	5/4	205/4
	$C_j - Z_j$	0	0	-15	-5/4	

- The opt. soln for primal model by simplex is

$$X_1^* = \frac{3}{16} \; ; \; X_2^* = \frac{7}{8} \; ; \; Z^* = \frac{205}{4}$$

- The opt. soln for Dual Model is

$$Y_1^* = 15 \; ; \; Y_2^* = \frac{5}{4} \; ; \; T^* = \frac{205}{4}$$

(3) ← حل الفرع 2.1 المقابل بطريقة السمبلكس المقابلة

$$\text{Min } T = 3Y_1 + 5Y_2$$

s.t.

$$\left.\begin{matrix} 2Y_1 + 3Y_2 \geq 40 \\ 3Y_1 + 4Y_2 \geq 50 \end{matrix}\right) * (-1)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Min } T = 3Y_1 + 5Y_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t.

$$-2Y_1 - 3Y_2 - S_1 = -40$$

$$-3Y_1 - 4Y_2 + S_2 = -50$$

$$Y_1, Y_2, S_1, S_2 \geq 0$$

C_j		3	5	0	0	b
C_B	B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	-2	-8	1	0	-40
0	S_2	-3	-4	0	1	-50
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	3	5	0	0	

$C_j - Z_j$ = [3 5 0 0]

S_2 معادلة = [-3 -4 0 1]

$\frac{C_j - Z_j}{\text{معادلة } S_2}$ = [$\frac{3}{-3}$ $\frac{5}{-4}$ ...]

نختار العمود الذي يقابل أكبر سالبة في b

$R_2^* = \frac{R_2}{-3} = [1 \ \frac{4}{3} \ 0 \ \frac{-1}{3} \ \frac{50}{3}]$

$R_1 = [-2 \ -8 \ 1 \ 0 \ -40]$

$-2R_2^* = [-2 \ \frac{-8}{3} \ 0 \ \frac{2}{3} \ \frac{-100}{3}]$

$R_1^* = [0 \ \frac{-16}{3} \ 1 \ \frac{-2}{3} \ \frac{-20}{3}]$

C_j		3	5	0	0	
C_B	B.V.	Y_1	X_2	S_1	S_2	b
0	S_1	0	$\frac{-16}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-20}{3}$
3	X_1	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{50}{3}$
	Z_j	3	4	0	-1	50
	$C_j - Z_j$	0	1	0	1	

نختار X_2

$C_j - Z_j$ = [0 1 0 1]

S_1 معادلة = [0 $\frac{-16}{3}$ 1 $\frac{-2}{3}$]

$\frac{C_j - Z_j}{\text{معادلة } S_1}$ [... $\frac{-3}{16}$ ...] 0.1875

$R_1^* = \frac{R_1}{\frac{-16}{3}} = \frac{-3}{16} R_1 = [0 \ 1 \ \frac{-3}{16} \ \frac{1}{8} \ \frac{15}{4}]$

$R_2 = [1 \ \frac{4}{3} \ 0 \ \frac{-1}{3} \ \frac{50}{3}]$

$\frac{4}{3}R_1^* = [0 \ \frac{4}{3} \ \frac{-1}{4} \ \frac{1}{6} \ 5]$

$R_2^* = [1 \ 0 \ \frac{1}{4} \ \frac{-1}{8} \ \frac{45}{3} = 15]$

C_j		3	5	0	0	
C_B	B.V.	Y_1	Y_2	S_1	S_2	b
5	Y_2	0	1	$\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$
3	Y_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	15
	Z_j	3	5	$\frac{-3}{16}$	$\frac{-7}{8}$	$\frac{205}{4}$
	$C_j - Z_j$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	

بما أنه لا يوجد b سالبة، إذن توصلنا إلى الحل الأمثل، أي أن:

$Z^* = \frac{205}{4}$

$Y_1^* = 15$, $Y_2^* = \frac{5}{4}$

ومن ثم نحول المتغيرات الوصيفة لتمثل الحل الأمثل للمسألة الدولية

$Z^* = \frac{205}{4}$ $\quad A_1^* = \frac{3}{16}$ $\quad X_2^* = \frac{7}{8}$

4. حل الفرعي ذو القابل بطريقة السمبلكس الاعتيادية

$$\min T = 3Y_1 + 5Y_2$$

s.t.

$$2Y_1 + 8Y_2 \geq 40$$

$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 50$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

يتم الحل بطريقة M لتحويل التقليل
او بطريقة M لتحويل التعظيم
بعد الاستنا. وضع الثابت
$\min T = -\max T$
نظر بحالة الحل ← (-) فتصبح max
نظر بالسالب للحصول على الاقل فتح

وكتابة الكل
$\max T' = \max -T$

$$\max T' = -3Y_1 - 5Y_2$$

s.t. Cons.

Standard simplex

$$\max T' = -3Y_1 - 5Y_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2$$

s.t.

$$2Y_1 + 8Y_2 - S_1 + R_1 = 40$$

$$3Y_1 + 4Y_2 - S_2 + R_2 = 50$$

$$Y_1, Y_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

C_B	B.V.	Y_1	Y_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b	Ratio
	C_j	-3	-5	0	0	-M	-M		
-M	R_1	2	8	-1	0	1	0	40	40/8 = 5
-M	R_2	3	4	0	-1	0	1	50	50/4 = 10
	Z_j	-5M	-12M	M	M	-M	-M	-90M	
	$C_j - Z_j$	-3+5M	-5+12M	-M	-M	0	0		

Join

$$R_1^* = \frac{R_1}{8} = [\frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{-1}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{8} \quad 0 \quad 5]$$

$$R_2 = [3 \quad 4 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 50]$$

$$4R_1^* = [1 \quad 4 \quad \frac{-1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 20]$$

C_B	B.V	Y_1	Y_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b	Ratio
	C_j	-3	-5	0	0	-M	-M		
-5	Y_2	1/4	1	-1/8	0	1/8	0	5	20
-M	R_2	2	0	1/2	-1	-1/2	1	30	15
	Z_j	-5/4 - 2M	-5	5/8 - 1/2M	M	-5/8 + 1/2M	-M	-25 - 30M	
	$C_j - Z_j$	-7/4 + 2M	0	(-5/8 + 1/2M) - M		(5/8 - 3/2M)			

$$R_2^* = [2 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{-1}{2} \quad 1 \quad 30]$$

$$R_2^* = \frac{R_2}{2} = [1 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 15]$$

$$R_1 = [\frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{-1}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{8} \quad 0 \quad 5]$$

$$\frac{1}{4} * R_2^* = [\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{-1}{8} \quad \frac{-1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{15}{4}]$$

$$R_1 - \frac{1}{4}R_2^* = [0 \quad 1 \quad \frac{-3}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{-1}{8} \quad \frac{5}{4}]$$

C_j		-3	-5	0	0			
C_B	B.V	Y_1	Y_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b
-5	Y_2	0	1	-3/16	1/8	3/16	-1/8	5/4
-3	Y_1	1	0	1/4	-1/2	-1/4	1/2	15
	Z_j	-3	-5	3/16	7/8			-205/4
	$C_j - Z_j$	0	0	-3/16	-7/8			

$$\text{Min } T = \text{Max}(-T)' = -\left(-\frac{205}{4}\right) = \frac{205}{4}$$

$$\therefore \text{Min } T = \frac{205}{4} \qquad Y_1^* = 15 \qquad Y_2^* = 5/4$$

$$Z^* = \frac{205}{4} \qquad X_1^* = \frac{3}{16} \qquad X_2^* = \frac{7}{8}$$

H.W

واجب ① جد الحل الامثل للمطلوب الرابع للمسألة السابقة باسلوب M المعدل بالتقليل

H.W-2 :- جد الحل الامثل للبرمجة الخطية الآتية بطريقة السمبلكس المقابلة

$$\text{Max } Z = -3X_1 - 2X_2 - X_3$$

s.t.

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$
$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 10$$
$$-X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$