المحاضرة الثانية

طريقة السمبلكس

هي طريقة رياضية لحل مسائل البرمجة الخطية والحصول على الحلول المثلى كما وتسمى أيضاً طريقة الجدول البسيط وهي طريقة ذات كفاءة عالية في إيجاد الحلول المثلى، وقد قام بتقديم وتطوير هذه الطريقة العالم الأمريكي جورج دانتزج في عام 1947، وتقوم هذه الطريقة بحل جميع المسائل سواء كانت متغيرين او اكثر حيث يتم اختيار المتغيرات ذات التأثير الاساسي على كل من دالة الهدف والقيود، وتسمى المتغيرات الاخرى التي ليس لها اي تأثير ولحل نماذج البرمجة الخطية (LP) باستخدام السمبلكس المبسطة يتم اتباع الاسلوب الآتي:-

1- لكي نبدأ باستخدام طريقة السمبلكس يجب ان تكون القيود بصيغة اصغر او يساوي

2- تحويل صيغة النموذج الى الصيغة القياسية قبل البدء بالحل

3- نضيف متغير وهمي (S) الى الطرف الايسر من كل متراجحة ونحولها الى معادلات

4- انشاء جدول خاص للنموذج يمثل الحل الابتدائي والتي تكون فيه قيمة دالة الهدف مساوية بالصفر والمتغيرات الاساسية تمثل المتغيرات الوهمية

5- اذا كانت عناصر الصف الاخير من الجدول (صف الدليل)

ⓐ اكبر من الصفر (اي $C_j - Z_j \geq 0$) في حالة التقليل (Min)

ⓑ اصغر من الصفر (اي $C_j - Z_j \leq 0$) في حالة التعظيم (Max)

فإن الحل المتيسر هو الحل الامثل اما اذا كان غير ذلك فيتطور الحل

6- اذا كانت صيغة الدليل في حالة الـ Max $C_j - Z_j \geq 0$ نختار اكبر قيمة موجبة وذلك لتحديد المتغير الداخل والذي يمثل العنصر المحوري ويمثل العمود الذي يقع به العنصر المحوري بالعمود المحوري

أما في حالة التقليل Min اذا كانت صيغة الدليل $C_j - Z_j \leq 0$ نختار القيمة الأكثر سالبية وذلك لتحديد المتغير الداخل والذي يمثل العنصر المحوري

7- لاختيار المتغير الخارج في النموذج يتم قسمة عناصر العمود (ظ) على عناصر العمود المحوري والمتغير الخارج يقابل النسبة الموجبة الاقل ليمثل الصف المحوري اما النسب السالبة والصفر تهمل

8- العنصر في نقطة تقاطع العمود المحوري والصف المحوري يسمى العنصر المحوري Pivot element

9- لتكوين جدول جديد يتم تحديد المتغير الداخل بدلاً من المتغير الخارج ومن ثم يتم البدء بتكوين الصف المحوري الجديد وذلك بقسمة عناصر الصف المحوري على العنصر المحوري اي $P^* = \frac{R \text{ صف القديم}}{\text{Pivot عنصر محوري}}$ = صف الجديد

٥- تكوين بقية صفوف الجدول باستخدام المعادلة الآتية

الصف الجديد = الصف القديم − (نقطة تقاطع الصف مع العمود * الصف المحوري الجديد)

١١- بعد تكوين الجدول الجديد يتم اختباره هل يمثل الحل الامثل

واذا لم نحصل على الحل الامثل يتم اعادة النقاط من الفقرة 6

مثال ١ :- الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

s.t.

$$X_1 + X_2 \leq 15$$
$$2X_1 + X_2 \leq 28$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل اولاً نحول الصيغة العامة الى الصيغة القياسية قبل البدء بالحل التوزيع

الصيغة العامة

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

s.t.

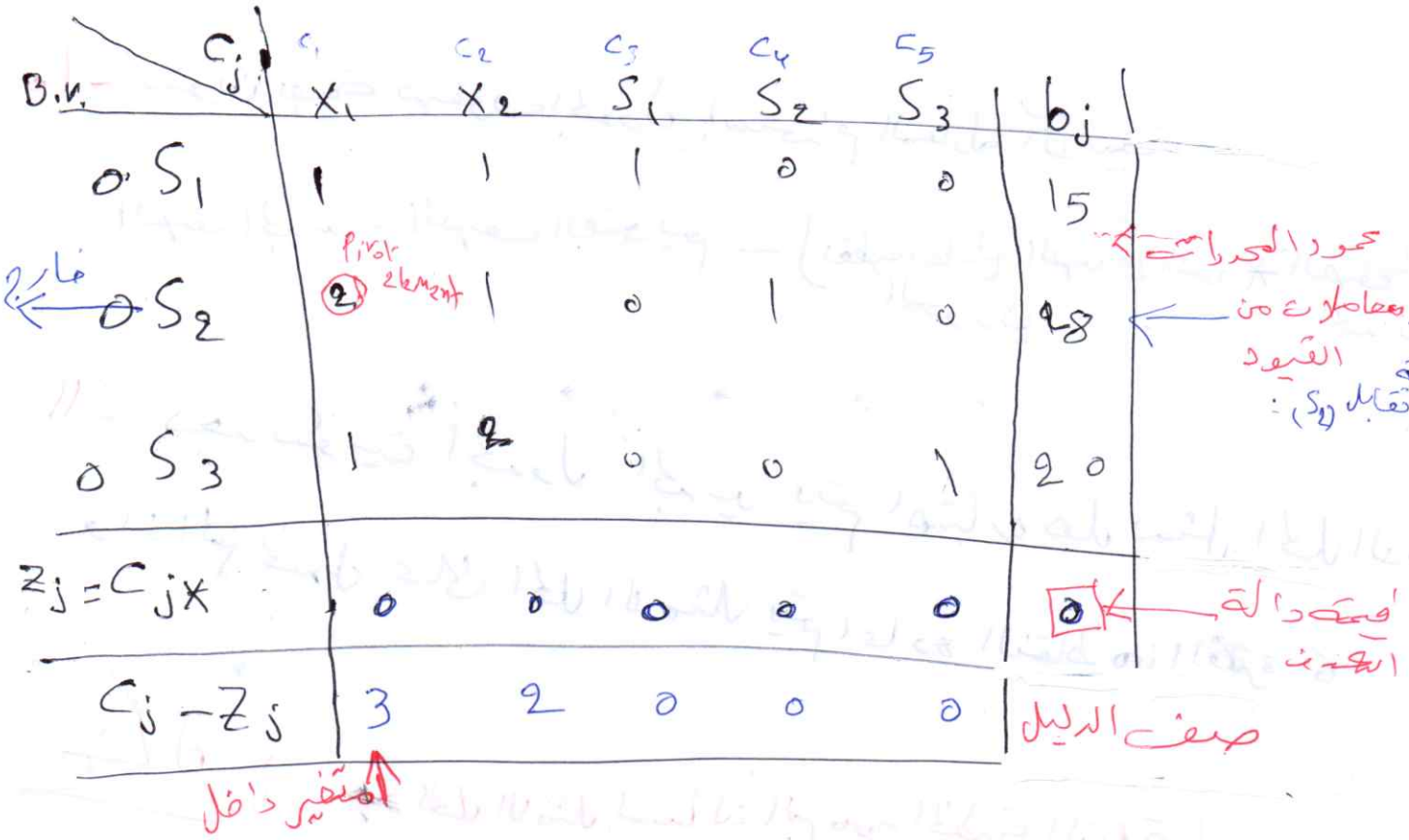
$$X_1 + X_2 \leq 15$$
$$2X_1 + X_2 \leq 28$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الصيغة القياسية

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

s.t.

$$X_1 + X_2 + S_1 = 15$$
$$2X_1 + X_2 + S_2 = 28$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 20$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



من ملاحظة صف الدليل $(C_j - Z_j)$ نلاحظ أكبر قيمة موجبة (3) تقابل المتغير (X_1) ليمثل المتغير الداخل، ولتحديد المتغير الخارج نقوم بقسمة عناصر العمود b_j على عناصر العمود المحوري X_1

وحساب الصف المحوري يتم وفقاً للصيغة

$$R_2^* = \frac{R_2}{Pivot}$$

حيث أن R_2: تمثل الصف الثاني

R_2^*: الصف الثاني الجديد

Pivot: القيمة المحورية وتساوي (2)

$$R_2^* = [\ 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 14\ ]$$

$$R_1^* = R_1 - 1 * R_2^*$$

$R_1 = [\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 15\ ]$

$1 * R_2^* = [\ 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 14\ ]$ نسخ

$R_1^* = [\ 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{-1}{2} \quad 0 \quad 1\ ]$

$$R_3^* = R_3 - 1 * R_2^*$$

$R_3 = [\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20\ ]$ نسخ

$1 * R_2^* = [\ 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 14\ ]$

$R_3^* = [\ 1 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad \frac{-1}{2} \quad 1 \quad 6\ ]$

B.V \ C_j	3	2	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_j
0 S_1	0	$\frac{1}{2}$ Pivot	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
3 X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14
0 S_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	6
Z_j	3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	42
$C_j - Z_j$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	

صف الحل

داخل

Ratio = $\frac{b_j}{\text{العمود المحوري}}$

$1/\frac{1}{2} = 2$

$14/\frac{1}{2} = 28$

$6/\frac{3}{2} = 4$

بملاحظة سطر الحل توجد قيمة موجبة اذن لم نصل الى الحل الامثل

$$R_1^* = \frac{R_1}{Pivot} \quad ; \quad R_2^* = R_2 - \frac{1}{2}R_1^* \quad ; \quad R_3^* = R_3 - \frac{3}{2}R_1^*$$

$$R_1^* = [\,0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 2\,]$$

$$R_2 = [\,1 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; 0 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; 0 \;\; 14\,]$$

$$\tfrac{1}{2}R_1^* = [\,0 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; 1 \;\; -\tfrac{1}{2} \;\; 0 \;\; 1\,]$$

$$R_2^* = [\,1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 13\,]$$

$$R_3 = [\,0 \;\; \tfrac{3}{2} \;\; 0 \;\; -\tfrac{1}{2} \;\; 1 \;\; 6\,]$$

$$\tfrac{3}{2}R_1^* = [\,0 \;\; \tfrac{3}{2} \;\; 3 \;\; -\tfrac{3}{2} \;\; 0 \;\; 3\,]$$

$$R_3^* = [\,0 \;\; 0 \;\; -3 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 3\,]$$

C_j / B.V.	3 x_1	2 x_2	0 s_1	0 s_2	0 s_3	b_j
2 x_2	0	1	2	−1	0	2
3 x_1	1	0	−1	1	0	13
0 s_3	0	0	−3	1	1	3
Z_j	3	2	1	1	0	43
$C_j - Z_j$	0	0	−1	−1	0	

صف الدليل

نلاحظ ان جميع صف الدليل صالحة الموجبة في حالة فقط ليدل على انه تم الوصول الى الحل الامثل

The opt Sol is

$$x_1^* = 13$$
$$x_2^* = 2$$
$$Z^* = 43$$

مثال 2 حل المثال التالي للبرمجة الخطية باستخدام السمبلكس

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 14X_2$$

s.t.

$$2X_1 + 7X_2 \leq 21$$
$$7X_1 + 2X_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل

نحول الصيغة العامة الى الصيغة القياسية قبل البدء بالسمبلكس

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 14X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t.

$$2X_1 + 7X_2 + S_1 = 21$$
$$7X_1 + 2X_2 + S_2 = 21$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

C_B	B.V.	C_j	4 X_1	14 X_2	0 S_1	0 S_2	b_j	Ratio
0	S_1		2	7	1	0	21	21/7 = 3
0	S_2		7	2	0	1	21	21/2 = 10.5
	Z_j		0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		4	14	0	0		

$$R_1^* = \frac{R_1}{\text{Pivot}} = \left[\frac{2}{7} \quad 1 \quad \frac{1}{7} \quad 0 \quad 3\right]$$

$$R_2 = [7 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 21]$$

$$2R_1^* = \left[\frac{4}{7} \quad 2 \quad \frac{2}{7} \quad 0 \quad 6\right]$$

$$R_2^* = \left[\frac{45}{7} \quad 0 \quad -\frac{1}{7} \quad 1 \quad 15\right]$$

C_B	B.V.	C_j	4	14	0	0	b_j
			X_1	X_2	S_1	S_2	
14	X_2		2/7	1	1/7	0	3
0	S_2		45/7	0	-1/7	1	15
Z_j			4	14	2	0	42
$C_j - Z_j$			0	0	-2	0	

The opt. soln is

$X_1^* = 0$

$X_2^* = 3$

$Z^* = 42$