الاستقراء الداخلي: Interpolation

لفهم الاستقراء الداخلي(يطلق عليه بالاستيفاء او الاندراج), افرض انه لدينا ازواج القيم الاتية $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ حيث ان n عدد صحيح موجب عندئذ , يعرف الاستقراء الداخلي بانه عملية إيجاد قيمة $y = f(x)$ عند النقطة x, بحيث ان $x_0 < x < x_n$ وان $x \neq x_i$ لجميع قيم i=0,1,2,….n أي ان قيمة x تقع ضمن مدى البيانات المعطاة ولكنها لاتساوي أي قيمة من القيم المعرفة لدينا , لذلك نستخدم مصطلح "الداخلي" هذا فاذن المشكلة الأساسية في هذه الحالة هي كيفية إيجاد دالة الاستقراء $f(x)$ من ازواج البيانات المتوفرة هناك عدة طرق لتقدير دالة الاستقراء $f(x)$, وهذا ماسنتطرق اليه قي الفقرات القادمة.

1- الاستقراء الداخلي الخطي (Linear Interpolation) :

يتم في الاستقراء الداخلي الخطي تقدير قيمة y باستخدام قيمة x من خلال العلاقة الخطية الاتية:

$$y = B_0 + B_1 x$$

حيث يتم تقدير قيمتي B_1, B_0 من خلال البيانات المعطاة في المسالة الرياضية .حيث نقوم باختيار نقطتين (زوجين من القيم) فقط من بين النقاط المعطاة مثلا $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ بشرط ان تقع قيمةx بين النقطتين أي ان $x_a < x < x_b$.كما ويفضل ام تكون قيمتي x_a و x_b , اقرب مايمكن الى قيمة x , وذلك لضمان العلاقة بين هاتين النقطتين اقرب ماتكون للعلاقة الخطية . اذن نحن لانحتاج لاستخدام جميع القيم المعطاة في المسالة الرياضية , وانما نحتاج لتحديد قيمتين فقط بعد تحديد القيميتين يمكن إيجاد الحل باستخدام احدى الطريقتين ادناه :

1- طريقة تساوي الميلين (Equal two slope method): وهي طريقة خاصة بالاستقراء الداخلي الخطي فقط نفرض وجود خط مستقيم بين النقطتين المحددتين $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$وان النقطة (x, y), تقع على الخط المستقيم$\overline{(x_a, y_a), (x_b, y_b)}$,وذلك يعني ان الميل بين النقطتين $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$يكون مساويا للميل بين النقطتين $(x_a, y_a), (x, y)$, أي ان:

$$slope = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{x - x_a}$$

ومما تقدم يتضح ان الاستقراء الداخلي الخطي هو عملية سهلة, وواضحة ,لكنها لاتعطي نتائج ذات ذات دقة عالية وذلك لان العلاقة بين النقطتين المحددتين قد لاتكون خطية , وكذلك لكون ان استخدام نقطتين فقط لبناء دالة الاستقراء يهمل المعلومات الأخرى المتوفرة لدينا من باقي البيانات .

1- طريقة منظومة المعادلات الخطية (System of Linear Equations Method):

وهذه الطريقة يمكن تطبيقها لايجاد دالة الاستقراء من أي درجة كانت (دزجة خطية,درجة تربيعية ,.....او درجة نونية) حيث وكما سبق ان نوهنا ,فانه في الاستقراء الداخلي الخطي يتم إيجاد قيمة y باستخدام قيمة x من خلال العلاقة الخطية:

$$y = B_0 + B_1 x$$

حيث انه بعد تحديد النقطتين $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$, نعوض في المعادلة أعلاه وكالاتي:

$$y_a = B_0 + B_1 x_a$$
$$y_b = B_0 + B_1 x_b$$

وبما ان $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ معلومة مسبقا في المسالة الرياضية اذن نلاحظ من المنظومة أعلاه تتكون من مجهولين B_1, B_0 ومعادلتين .اذن يمكن تحويل المنظومة أعلاه الى صيغة المصفوفات وكالاتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_a \\ 1 & x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}$$

اذن بالإمكان حل المنظومة أعلاه باستخدام اجدى الطرق التي تطرقنا لها مسبقا في الفصل الدراسي الأول ,مثل طريقة كاوس للخدف ,طريقة كاوس- جوردن ,طريقة المعكوس A^{-1}, وطريقة التحليل المثلثي ,وكذلك الطرق الأخرى العددية مثل طريقتي جاكوبي وطريقة كاوس –سيدل.

وبعد الحل يتم تعويض قيم B_1, B_0 المقدرة في معادلة العلاقة الخطية ,ومن ثم يمكن حساب قيمة y بالتعويض بقيمة x.

Example:

The data below represents the speed of a specific rocket from the moment of launch until the 30th second after the desired launch. Estimating the speed of the rocket at 16 seconds using linear interpolation.

Time in seconds	0	10	15	20	22.5	30
Speed km/min	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

الحل:

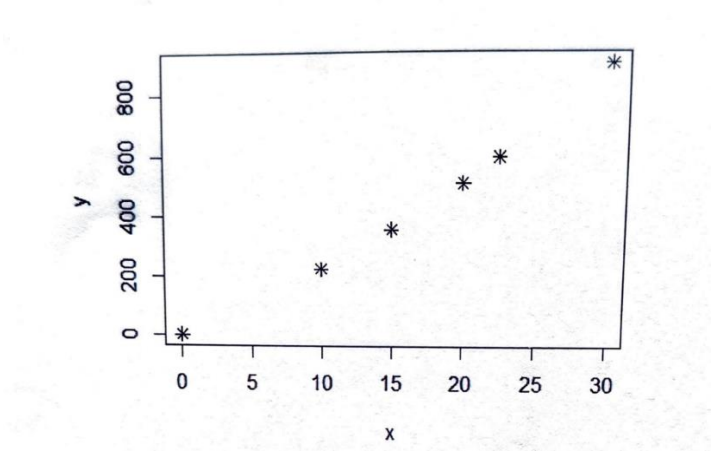
(Equal two slop method):واضح ان المتغير x يمثل الزمن ,بينما يمثل المتغير y سرعة الصاروخ بمعنى اخر فان السرعة $y = f(x)$ هي غير معلومة بالنسبة للزمن x. بما ان المطلوب هو تقدير سرعة

الصاروخ عندما $x = 16$, فان اقرب قيمتين هيx_a= 15 و $x_b = 20$ويقابلهما $y_{a=362.78}$, $y_{b=517.35}$ وبالتعويض في الصيغة (1) أعلاه يمكن حساب قيمة y التقديرية كالاتي:

$$y = y_a + (x - x_a)\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$y = 362 + (16 - 15)\frac{517.35 - 362.78}{20 - 15} = 393.694$$

اذن تقدر سرعة الصاروخ عند الثانية 16 ب 393.694 كم| د , وذلك حسب الاستقراء الداخلي.



بالإمكان تقدير قيمتي B_1,B_0 من خلال البيانات المعطاة في System of Linear Equations Method :- المسالة الرياضية ففي المثال أعلاه عند تحديد النقطتين $(x_b, y_b) = (20,517.35)$, $(x_a, y_a) =$ (15,362.78), فانه بالإمكان التعويض في معادلة الخط المستقيم وكالاتي :

$$y_a = B_0 + B_1 x_a$$
$$362.78 = B_0 + B_1(15)$$

$$y_b = B_0 + B_1 x_b$$
$$517.35 = B_0 + B_1(20)$$

والان يمكن ملاحظة ان المعادلتين الاخرتين تشكلان منظومة معادلات خطية , حيث لدينا هنا معادلتين ومجهولين B_1,B_0 لذا يمكننا تطبيق احدى طرق حل منظومة المعادلات الخطية التي تكلمنا عنها في الفصل الأول . على سبيل المثال,استخدام طريقة كاوس –جوردن لحل المسالة أعلاه وكالاتي :

$$B_0 + 15B_1 = 362.78$$
$$B_0 + 20B_1 = 517.35$$

وبطريقة المصفوفات

$$Ax = b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

والان يتم كتابة المصفوفة الموسعة ومن ثم تطبيق التحويلات اللازمة لتحويل المصفوفة الموسعة الى مصفوفة الوحدة وكالاتي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 15: & 362.78 \\ 1 & 20: & 517.35 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0: & \text{-}100.93 \\ 0 & 1: & 30.914 \end{bmatrix}$$

أي ان معادلة الخط المستقيم التي سنطبقها في الاستقراء الداخلي الخطي تكون كالاتي :

$$y = -100.93 + 30.914x$$

علما ان صلاحية النمودج الأخير مقتصرة على جميع قيم x التي تحقق $15 < x < 20$ اذن عندما تكون $x = 16$

$$y = -100.93 + 30.914 \times 16 = 393.694$$

وهي النتيجة نفسها التي نوصلنا اليها باستخدام الصيغة (1).

Homework:

1- *For the above example data, use linear inter*polation *to estimate the speed of the rocket when x=24 By applying the method of* Equal two slop.

2- For the above example data, use linear interpolation to estimate the speed of rocket when

x =21 by solving a system of linear equations using the inverse matrix method.