Trancendental Functions — الدوال المتسامية

كل دالة ليست جبرية تسمى دالة متسامية وامثلة على ذلك الدوال اللوغاريتمية ، الاسية،المثلثية والدوال المثلثية العكسية .

its domain is the set of all positive number.

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

if f(x)=Ln(x) then :

$$\boxed{\frac{d}{dx}Ln(x)=\frac{1}{x}}$$

and in general form $\boxed{\frac{d}{dx}Ln(u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$

THEOREM : if **a&b** are positive number and **n** is any rational number then :

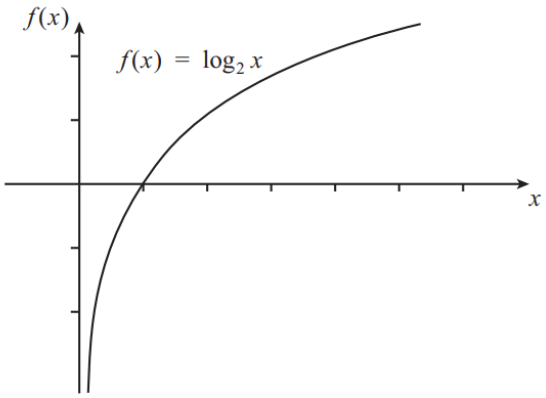
$$1]\ Ln1=0 \qquad 2]\ Lne=1 \quad , \quad e=2.718...$$

$$3]\ Lnab=Lna+Lnb \qquad 4]\ Lnabc...z=Lna+Lnb+...Lnz$$

$$5]\ Ln\frac{a}{b}=Lna-Lnb \qquad 6]\ Ln\frac{1}{a}=-Lna \qquad 7]\ Lnx^{n}=n.Lnx$$

$$8]\ graph\ of\ \ y=Lnx \quad is:$$

x	$f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to**

$$1)\ y = Ln(2x+7) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+7}$$

$$2)\ y = Ln(x^2+8) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+8}$$

$$3)\ y = Ln(Lnx) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Lnx}.\frac{1}{x} = \frac{1}{xLnx}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي **Logarithim Diff.**

يستخدم الاشتقاق اللوغاريتمي في حالة عدم استطاعتنا اشتقاق الدالة المعطاة بالطرق السابقة وعادة ما تستخدم هذه الطريقة في الدوال الكسرية والدوال المضروبة ببعضها وتحوي على حدود كثيرة وتتلخص الطريقة كالاتي :

1) اخذ لوغاريتم Ln الطرفين .
2) نبسط الدالة باستخدام خواص اللوغاريتمات .
3) نشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـــ x .
4) ضرب الطرفين بـــ y .
5) تعويض قيمة y بما يعادلها بالمتغير x .

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to**

$$1)\ y = x^x$$

$$Lny = Lnx^x = xLnx$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\ \frac{1}{x} + Lnx\ (1) = 1 + Lnx$$

$$\frac{dy}{dx} = y\ (1+Lnx) = x^x\ (1+Lnx)$$

2) $y = (5x^2 + x + 1)(x^3 - 2)^3 \sqrt{x^2 + 1}$

$$Lny = Ln(5x^2 + x + 1)(x^3 - 2)^3 \sqrt{x^2 + 1}$$

$$Lny = Ln(5x^2 + x + 1) + Ln(x^3 - 2)^3 + Ln\sqrt{x^2 + 1}$$

$$Lny = Ln(5x^2 + x + 1) + 3Ln(x^3 - 2) + \frac{1}{2}Ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1} + 3\frac{3x^2}{x^3 - 2} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1} + \frac{9x^2}{x^3 - 2} + \frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left((5x^2 + x + 1)(x^3 - 2)^3 \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(\frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1} + \frac{9x^2}{x^3 - 2} + \frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

اللوغاريتم الاعتيادي ذو الاساس a **Logarithim with base a**

اللوغاريتم الطبيعي هو اللوغاريتم الذي اساسه هو **e** ويمكن ان يكتب بصيغة اخرى هي $Lnx = \underset{e}{Log}\, x$

اما اللوغاريتم الاعتيادي فهو اللوغاريتم الذي اساسه ليس **e** مثل اللوغاريتم العشري واللوغاريتم الذي اساسه **a**

وهناك علاقة مهمة تربط اللوغاريتم الاعتيادي باللوغاريتم الطبيعي وهي : $\underset{a}{Log}\, x = \frac{Lnx}{Lna}$, $a \neq 1$

مشتقة دالة اللوغاريتم الاعتيادي :

$$\frac{d}{dx}\underset{a}{Log}\,x=\frac{d}{dx}\frac{Lnx}{Lna}=\frac{1}{x\ Lna}$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{d}{dx}\underset{a}{Log}\,x=\frac{1}{x\ Lna}}$$

and in general form :

$$\boxed{\boxed{\frac{d}{dx}\underset{a}{Log}\,u=\frac{du}{u\ Lna}}}$$

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to** $y=\underset{2}{Log}(3x+1)$

$$1)\ y=\frac{Ln(3x+1)}{Ln2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3}{(3x+1)Ln2}$$

$$2)\ \frac{dy}{dx}=\frac{3}{(3x+1)Ln2}$$

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to** $y=LnLnx+\underset{3}{Log}(x^2+5)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xLnx}+\frac{2x}{(x^2+5)Ln3}$$

Homework:

1) *Find* $\frac{dy}{dx}$ *to* $y=$

$Ln(2x^3)$, $Ln(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}})$, $Ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

$\frac{2x^2+1}{Ln(2x^2+1)}$, $x(\underset{2}{Log}(x^2-2x))^3$, $\frac{\underset{2}{Log}\,x}{1+\underset{3}{Log}\,x}$

2) *Find* $\frac{dy}{dx}$ *to* $y = Sinx\,.Lnx\,.(x^3+1)^5.\sqrt{x^2+1}.\frac{1}{x}$

3) *if* $Ln2 = a$, $Ln3 = b$, *find* $Ln4, Ln9, Ln6, Ln1.5, Ln8$

THE EXPONETIAL FUNCTIONS

Properties of exp. fun.

$Lne = 1$, $e^0 = 1$, $e = 2.718...$

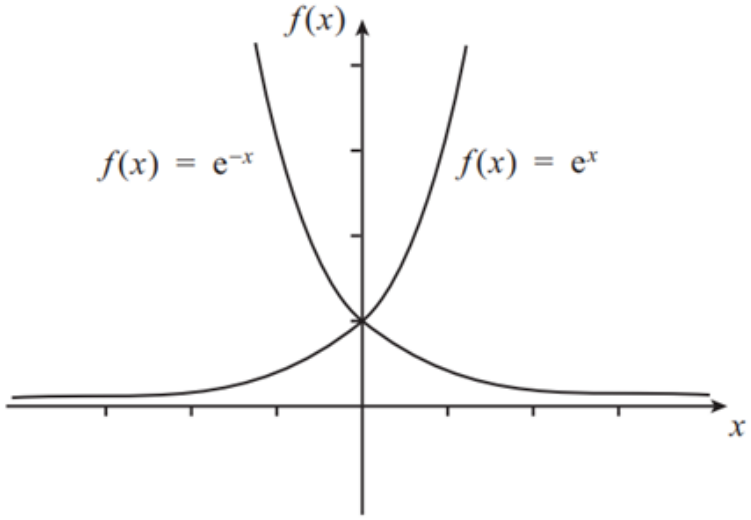
$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{ax} = (e^a)^x = (e^x)^a$

its domain is all real no.

its range are $y > 0$

the graph of $y = e^x$ *is*



أشتقاق الدوال الاسية :

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}}$$

Proof:

$$let \quad y = e^{x}$$

$$Lny = Lne^{x} = xLne = x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y = e^{x}$$

and in general form

$$\boxed{\boxed{\frac{d}{dx}e^{u} = e^{u}\frac{du}{dx}}}$$

EXAM: Find $\frac{dy}{dx}$ to :

$$y = e^{3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{3x}(3) = 3e^{3x}$$

$$y = e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$$

$$y = xe^{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{x} + e^{x}(1) = xe^{x} + e^{x}$$

$$y = e^{x^3} + LnLnx + x^3 + e \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^3}(3x^2) + \frac{1}{xLnx} + 3x^2 + 0$$

EXAM : Simplify

$$y = e^{2Lnx} \Rightarrow e^{Lnx^2} = x^2$$

$$y = e^{2Ln\frac{x}{y}} \Rightarrow e^{Ln(\frac{x}{y})^2} = (\frac{x}{y})^2$$

Exponetial fun. of type a^x , a^u

$$a^x = e^{xLna} = e^{Lna^x} = a^x$$

اشتقاق الدالة الاسية من نوع a^x

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x Lna}$$

and in general form :

$$\boxed{\boxed{\frac{d}{dx}a^u = a^u Lna\frac{du}{dx}}}$$

EXAM: Find $\frac{dy}{dx}$ to :

$$y = 3^{x^4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{x^4}.Ln3.(4x^3)$$

$$y = 7^{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{x^2}.Ln7.(2x)$$

$$y = 10^{Lnx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 10^{Lnx}.Ln10.(\frac{1}{x})$$

Homework

1) Show that

$(a)\ y = xe^{-x}$ *satisfies the eq.* $xy' = (1-x)y$

$(b)\ y = xe^{-x^2/2}$ *satisfies the eq.* $xy' = (1-x^2)y$

2) Find $\frac{dy}{dx}$ to :

$$y = Ln(1-xe^{-x}) \quad , \quad y = \frac{e^x}{Lnx} \quad , \quad y = x^3e^{-x}$$