$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}$$

Higher Derivatives المشتقات ذات الرتب العليا

Let $y = f(x)$

The second derivative is denoted by:

$$y'', \frac{d^2y}{dx^2}, f''(x), f^{(2)}(x), D_x(f(x))$$

The third derivative is denoted by:

$$y''', \frac{d^3y}{dx^3}, f'''(x), f^{(3)}(x), D_x f''(x) \text{ and so on}$$

⋮

The n-th derivative is denoted by:

$$y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n}, f^{(n)}(x), D_x^n, D_x(f^{(n-1)}(x))$$

Ex: If $y = \tan x$, find y', y''

Solution:

$y = \tan x$

$y' = \sec^2(x) = (\sec x)^2$

$y'' = 2(\sec x) \cdot \sec x \tan x$

$= 2\sec^2 x \tan x$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Ex: Let $f(x) = \sin(e^x)$, find $f''(x)$

Solution

$f(x) = \sin(e^x)$

$f'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x = e^x(\cos(e^x))$

$f''(x) = e^x(-\sin(e^x) \cdot e^x) + \cos(e^x) \cdot e^x$

$f''(x) = -e^{x^2}\sin(e^x) + e^x(\cos e^x$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Application of Derivative

1- Extreme values القيم القصوى

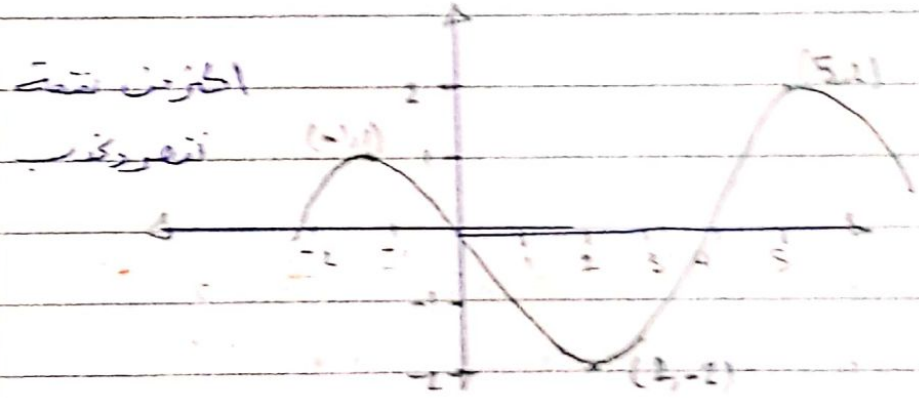
① - Local Extremes [relative Extrems]
القيم القصوى المحلية

① - f has local maximum 'max' at 'c' if

$f(c) \geq f(x)$, $\forall x$ closed to c both sides in D_f

② f has a local Minimum 'min' at 'c' if

$f(c) \leq f(x)$, $\forall x$ closed to both sides in D_f
في الجوار



1- f has local max at $x = -1.5$, which 1.21
2- f has local min at $x = 2$, which -2

② Absolute Extremes القيم القصوى المطلقة

① f has absolute max at 'c' if

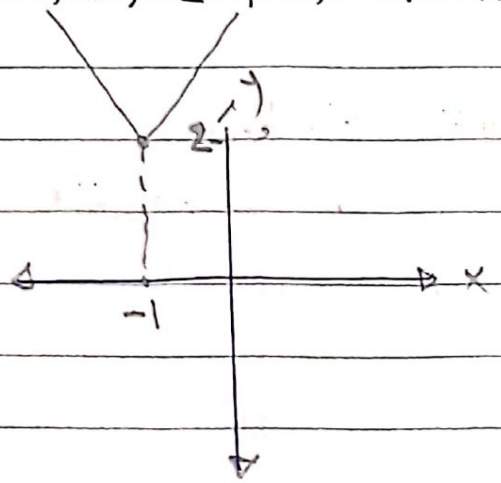
$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in D_f$

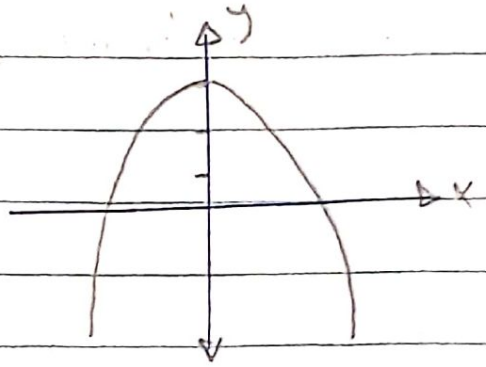
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) f has absolute min at "c" if

نقطة واحدة تحقق أنها تقع أدنى المنحنى

$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in D_f$





$f(x) = |x+1| + 2$

$f(-1) = 2$ is absolute min

أصغر قيمة في كل مجال للدالة f

$f(x) = 3 - x^2$

$f(0) = 3$ is absolute max

أكبر قيمة في كل مجال للدالة f

Rolle's Theorem نظرية رول

If f is continuous function in $[a, b]$ and differentiable in open interval (a, b), If $f(a) = f(b)$, then thier is a and b such that $a < c < b$ satisfy $f'(c) = 0$

شروط تطبيق النظرية

a) $f(x)$ is cont. on $[a, b]$

b) $f(x)$ is diff. on (a, b)

c) $f(a) = f(b)$ إذا تحققت هذه الشروط فإن

$\exists$ atleast one real number, such that

$f'(c) = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Example:- Let $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ on $[0,4]$

Does f satisfy Rolle's theorem on $[0,4]$

Solution:-

$$f(x) = \sqrt{x(4-x)} \quad , \quad f'(x) = \frac{4-2x}{2\sqrt{x(4-x)}}$$

$$f'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}$$

1) $f(x)$ is cont. on $[0,4]$

2) f is diff. on $(0,4)$

3) $f(0) = 0 = f(4)$

$\Rightarrow$ f satisfy Rolle's theorem on $(0,4)$

$\Rightarrow \exists$ at least $c \in (0,4)$ s.t. $f'(c) = 0$

$$f'(c) = 0 = \frac{2-c}{\sqrt{c(4-c)}} = 0$$

$2 - c = 0 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

The mean value Theorem . مبرهنة القيمة الوسطى

اذا كانت f دالة مستمرة في الفترة الحلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)، فانه يوجد عدد z بين a,b بحيث ان $a<z<b$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(z)$$

البرهان . صفحة 42 / حساب التفاضل والتكامل مع الهندسة التحليلية

If f is continuous function in $[a,b]$, and differentiable in open interval (a,b), then there is number z between a and b and $a<z<b$ such that:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(z)$$

Proof: with out proof

مبرهنة القيمة الوسطى: هي احدى مبرهنات التحليل الرياضي للدوال المستمرة (المتصلة) وتنص (تعرف منها) بان الدالة المستمرة اذا كانت تتخذ قيمتين مختلفتين فانها تتخذ جميع القيم التي بين هاتين القيمتين

مبرهنة رول: هي اداة رياضية تستخدم لحساب قيمة التكاملات المعقدة بتبسيطها الى تكاملات اسهل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Example: Is $f(x) = x^3$ satisfies the mean value theorem on $[-4,4]$. If it is satisfies, find the value of z

Solution

(1) $f(x) = x^3$, is continuous function on $[-4,4]$

because it is polynomial function

(2) $f'(x) = 3x^2$, exists in $(-4,4)$

$\therefore \exists$ at least one number like z in $-4 < z < 4$ s.t

$$f'(z) = \frac{f(4) - f(-4)}{4 - (-4)}$$

$$3z^2 = \frac{4^3 - (-4)^3}{8} = \frac{64+64}{8}$$

$$3z^2 = \frac{128}{8}$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow z = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}$$

EX: H.W

Is $f(x) = x^{2/3}$ satisfies the M.V.T on $[-2,1]$, If it is satisfies find the value of z ~~and~~

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner