المحاضرة (6)

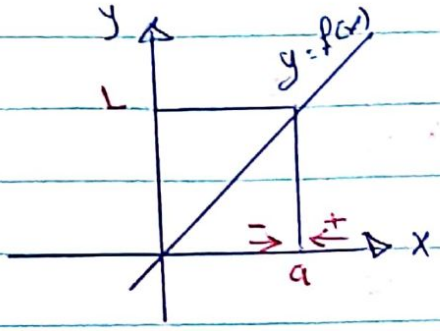
Limits and continuity النهايات والاستمرارية

Limits.

① $\lim_{x \to a} f(x) = L$

means that $f(x) \to L$ as $x \to a$

اي ان x تقترب من a لكن / تساوي



② Right hand limit النهاية من اليمين

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ means that $f(x) \to L$ as $x \to a$ from right

③ left hand limit

④ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ means that $f(x) \to L$ as $x \to a$ from left

⑤ limit exist وجود النهاية

$\lim_{x \to a} f(x)$ exist and equal to L iff

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

م/ لايجاد النهاية نعوض العدد الذي تقترب منه x

١- اذا كانت نتيجة التعويض (عدد فعلي) تكون موجودة

اما اذا كانت $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ تكون غير موجودة

٢- اذا كانت نتيجة التعويض $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ او 1^∞ او ∞^0 او $\infty - \infty$

يجب علينا القيام ببعض العمليات الرياضية (تحليل او توحيد المقام بالمرافق او جمع او تكوين)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Example: Find the Limits of the Following.

① $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$ exist

② $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$ does not exist

③ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ كيف اذا كواحد

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$ exist

④

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

since $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$\therefore \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ $\therefore$ Limit does not exist

H.W find the limit of

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ 2. $\lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1}$ 3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6} \quad \text{exist}$$

Homework

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{|x|}$

2. $\lim_{x\to 3^-} (x - [x])$

سؤال اختبار

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{x}} \qquad |x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{exist}$$

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

Algebraic operation on limit : Limits theorem .

If $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$

1) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L+M$

2) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L-M$

3) $\lim_{x\to a}[c\,f(x)] = c\cdot\lim_{x\to a} f(x)=c\,L$

4) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=L.M$

5) $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \frac{L}{M}$ $\quad g(a)\neq 0$

Theorem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Examples: Find $\lim_{x\to 2}\frac{5x^3+4}{x-3}$

$$\Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2} 5x^2+4}{\lim_{x\to 2} x-3} = \frac{20+4}{-1} = -44$$

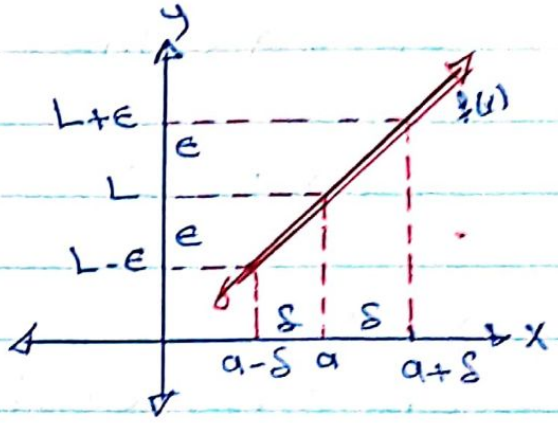
2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x-3)=0$

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

Formal Definition of limit التعريف الدقيق للنهاية

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ such that $|f(x) - L| < \epsilon$ whenever $|x - a| < \delta$



اي انه لكل $\epsilon > 0$ اذا استطعنا ايجاد عدد مقابل مثل δ يعتمد في قيمته على ϵ نكون قد اثبتنا وجود النهاية.

خطوات الحل على هذا التعريف

١- نبدأ من $|f(x) - L| < \epsilon$

٢- ثم نحول القيمة المطلقة الى متباينة $-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$

٣- ثم نتدرج في حل المتباينة الى ان نحصل على المتباينة التالية

$-\delta < x - a < \delta$

فاذا حصلنا عليها تكون النهاية موجودة او العكس صحيح

Examples:

① Prove that $\lim_{x \to 1} x = 1$

$$|f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow |x - 1| < \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < x - 1 < \epsilon$$

$$\Rightarrow \delta = \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} x \text{ exists } L = 1$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) Prove that $\lim_{x \to 1} 3x+2=5$

Solution: let $\epsilon > 0$ ... الكتاب ص VI ص

$|f(x)-L| < \epsilon \rightarrow |3x+2-5| < \epsilon$

$\Rightarrow |3x-3| < \epsilon$

$\Rightarrow -\epsilon < 3x-3 < \epsilon$ نقسم 3 لكل طرف

$\Rightarrow 3-\epsilon < 3x < 3+\epsilon$ في المتباينة

نقسم على 3

$1-\frac{\epsilon}{3} < x < 1+\frac{\epsilon}{3}$

نطرح 1 من كل طرف

$-\frac{\epsilon}{3} < x-1 < \frac{\epsilon}{3}$

$\therefore \delta = \frac{\epsilon}{3}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} 3x+2$ exist $=5$

3) Prove that $\lim_{x \to 4} 5x-3 = 17$

Solution: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ such that

$x \in D_f, \ 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

$|5x-3-17| < \epsilon \Rightarrow |5x-20| < \epsilon$

$-\epsilon < 5x-20 < \epsilon \quad \div 5$

$-\frac{\epsilon}{5} < x-4 < \frac{\epsilon}{5}$

$\therefore |x-4| < \frac{\epsilon}{5} \quad \therefore \delta = \frac{\epsilon}{5}$

it is true for $\epsilon > 0$ $\therefore$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اكالة (الاثر العكسي من البرهان

let $\epsilon > 0$, then

$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow 0 < |x-4| < \frac{\epsilon}{5}$

$-\frac{\epsilon}{5} < x-4 < \frac{\epsilon}{5} \quad *5$

$-\epsilon < 5x-20 < \epsilon$

$-\epsilon < 5x-3-17 < \epsilon$

$= |f(x)-L| < \epsilon$

$\therefore 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$ — (3)

الحالة (3) صحيحة لكل $\epsilon > 0$ وبهذا التعريف الدقيق للغاية

$\lim_{x \to 4} (5x-3) = 17$

Continuity الاستمرارية

we say that a function is continuous at the point a if the three following conditions are satisfies

① - $f(a)$ is defined

② $\lim_{x \to a} f(x)$ exist

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

Example

A function $f(x) = x^2+1$ is continuous at 2

① $f(2) = 4+1 = 5$

② $\lim_{x\to 2} x^2+1 = 5$ $\quad\therefore f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 5$

f is continuous

② $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ is continuous at $x=3$

① $f(3) = \sqrt{4-9} = \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$ $\quad f(3)$ is not defined

$\therefore$ the function is not continuous

③ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ at 2

① $f(2) = \dfrac{4-4}{2-2} = \dfrac{0}{0}$ is not defined

② $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} \quad \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

نلاحظ ان الشرط الاول يكون كثيرة حدود والمقام ايضا
تحقق الشرط الثاني اذا ان الدالة جزئية
لذلك فهناك عدة اسباب لعدم وجود نهاية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner