Home Work

$\int \cos^2 x dx$ $\int \sin^3 x dx$

$\int Ln^2 x dx$ $\int x^3 \sin x dx$

$\int x^3 e^x dx$ $\int x^2 e^{-x} dx$

$\int \tan^{-1} x dx$ $\int x \sec^{-1} x dx$

$\int \cos(Lnx) dx$ $\int (x^2 + x + 1)\sin x dx$

INTEGRAL METHODS\PARATIAL FRACTIONS

اذا كانت الدالة نسبية أي بشكل $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ **وكانت درجة البسط اقل من درجة المقام ، والمقام يتحلل الى العوامل الاولية ولم نستطع تكاملها بالطرق الاعتيادية البسيطة نلجأ الى طريقة تجزئة الكسور .**

ملاحظة : اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام او مساوية لها فنقسم اولاً ثم نكامل .

الحالة الاولى

اذا كانت عوامل g(x) خطية اولية (من الدرجة الاولى) وغير متكررة أي ان :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \ldots\ldots + \frac{Z}{(x-a_n)}$$

ومن هذه الخطوة نوحد المقامات ونساوي معاملات x^n **في البسط للطرفين ونوجد قيم الثوابت A,B,…,Z ثم نكامل.**

EXAM :

1 $\int \frac{2x}{2x^2 + x - 6} dx$

$$\frac{2x}{2x^2 + x - 6} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(2x-3)}{(2x-3)(x+2)}$$

$$2x = A(x+2) + B(2x-3)$$

$$2 = A + 2B$$

$$0 = 2A - 3B \Rightarrow A = \frac{3}{2}B$$

$$2 = \frac{3}{2}B + 2B \Rightarrow B = \frac{4}{7} \Rightarrow A = \frac{6}{7}$$

$$\therefore \int \frac{2x}{2x^2 + x - 6} dx = \int \left(\frac{6/7}{2x-3} + \frac{4/7}{x+2}\right) dx$$

$$= \frac{6}{7}\frac{1}{2} Ln|2x-3| + \frac{4}{7} Ln|x+2| + C$$

2 $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$1=A(x+2)+B(x-1)$$

$$0=A+B \Rightarrow A=-B$$

$$1=2A-B=2A+A=3A \Rightarrow A=\frac{1}{3} \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2+x-2}=\int \frac{1/3}{(x-1)}dx-\int \frac{1/3}{(x+2)}dx=\frac{1}{3}Ln|x-1|-\frac{1}{3}Ln|x+2|+C$$

3 $\int \frac{x+5}{x^2-3x-10}dx$

$$\frac{x+5}{x^2-3x-10}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-5)}{(x-5)(x+2)}$$

$$x+5=A(x+2)+B(x-5)$$

$$1=A+B \Rightarrow A=1-B$$

$$5=2A-5B=2(1-B)-5B \Rightarrow -7B=3 \Rightarrow B=-3/7 \Rightarrow A=10/7$$

$$\therefore \int \frac{x+5}{x^2-3x-10}dx=\int \frac{10/7}{(x-5)}dx-\int \frac{-3/7}{(x+2)}dx=\frac{10}{7}Ln|x-5|-\frac{3}{7}Ln|x+2|+C$$

4 $\int \frac{3x+8}{x^2-11x+30}dx$

$$\frac{3x+8}{x^2-11x-30}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-6)}=\frac{A(x-6)+B(x-5)}{(x-5)(x-6)}$$

$$3x+8=A(x-6)+B(x-5)$$

$$3=A+B \Rightarrow A=3-B$$

$$8=-6A-5B=-6(3-B)-5B \Rightarrow B=26 \Rightarrow A=-23$$

$$\therefore \int \frac{3x+8}{x^2-11x-30}dx=\int \frac{-23}{(x-5)}dx+\int \frac{26}{(x-6)}dx=-23Ln|x-5|+26Ln|x-6|+C$$

5 $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}$

عند تحليل دالة من الدرجة الثالثة نتبع ما يلي :

1- نبحث عن جذر يحقق المعادلة بعد مساواتها بالصفر .

2- نقسم المعادلة في المقام على (x-root) قسمة طويلة حيث ان root هو الجذر .

في المثال اعلاه نجد ان الجذر هو (1) يحقق المعادلة في المقام

اذن نقسم المعادلة قسمة طويلة على x-1 .

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+6 \\ \hline x-1 & x^3+4x^2+x-6 \\ & \underline{|x^3-x^2} \\ & 5x^2+x-6 \\ & \underline{|5x^2-5x} \\ & 6x-6 \\ & \underline{|6x-6} \\ & 0 \end{array}$$

$$\therefore x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$

$$=(x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+3)}$$

$$A=1/12 \quad , \quad B=-1/3 \quad , \quad C=1/4$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{1}{12}Ln|x-1|-\frac{1}{3}Ln|x+2|+\frac{1}{4}Ln|x+3|+C$$

الحالة الثانية :

اذا كانت عوامل g(x) خطية اولية (من الدرجة الاولى) و متكررة أي ان :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}+.....+\frac{Z}{(x-a)^n}$$

6 $\int \frac{4x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$

$$\frac{4x+3}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$A+C=0\Rightarrow A=-C$ .....(1)

$A+B-2C=4$ .....(2)

$-2A+2B+C=3$ .....(3)

$by\ sub.\ 1\ in\ \ 2we\ get:\ -C+B-2C=4\Rightarrow B=4+3C$ .....(4)

$by\ sub.\ 1\ \&\ 4\ in\ \ 3we\ get:$

$-2(-C)+2(4+3C)+C=3\Rightarrow 9C=-5$

$C=\frac{-5}{9}\qquad A=\frac{5}{9}\qquad B=\frac{7}{3}$

$$\therefore \int \frac{4x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{5}{9}Ln|x-1|-\frac{7}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{5}{9}Ln|x+2|+C$$

7 $\int \frac{4x^2+2x+5}{(x-2)^3}dx$

$$\frac{4x^2+2x+5}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}=\frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3}$$

$$4x^2+2x+5=A(x^2-4x+4)+B(x-2)+C \Rightarrow A=4$$

$$-4A+B=2\Rightarrow B=18 \quad , \quad 4A-2B+C=5\Rightarrow C=25$$

$$\int \frac{4x^2+2x+5}{(x-2)^3}dx=4\int \frac{dx}{x-2}+18\int \frac{dx}{(x-2)^2}+25\int \frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$=4Ln|x-2|-18(x-2)^{-1}-\frac{25}{2}(x-2)^{-2}+C$$

8 $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx$

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=\frac{2x+4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$2x+4=A(x^2-2x)+B(x-2)+Cx^2$$

$$A+C=0\Rightarrow A=-C$$

$$-2A+B=2$$

$$-2B=4\Rightarrow B=-2 \ , \ A=-2 \ , \ C=2$$

$$\therefore \int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx=-2\int \frac{dx}{x}-2\int \frac{dx}{x^2}+2\int \frac{dx}{(x-2)}=-2Ln|x|+\frac{2}{x}+2Ln|x-2|+C$$

الحالة الثالثة :

اذا كانت عوامل g(x) غير خطية (من الدرجة الثانية) وغير متكررة أي ان :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2).....(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

عندئذ التعويض يكون بالشكل التالي :

$$\frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+.....+\frac{Yx+Z}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

$$\boxed{9}\ \int\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)(x-2)}dx$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{(x-2)}=\frac{(Ax+B)(x-2)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)}$$

$$x^2+3x+2=Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+C$$

$$A+C=1\Rightarrow A=1-C \quad .....(1)$$

$$-2A+B=3 \quad .....(2)$$

$$-2B+C=2 \quad .....(3)$$

$$from\ 2we\ get\ \ B=3+2A=3+2(1-C)=5-2C \qquad (sub.\ in\ \ 3)$$

$$-2(5-2C)+C=2\Rightarrow C=\frac{12}{5}\ ,\ B=\frac{1}{5}\ ,\ A=\frac{-7}{5}$$

$$\int\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)(x-2)}dx=\int\frac{-7/5\,x+1/5}{x^2+1}dx+\int\frac{12/5}{(x-2)}dx$$

$$=\frac{-7}{5}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{12}{5}\int\frac{dx}{(x-2)}$$

$$=\frac{-7}{10}Ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+\frac{12}{5}Ln\left|x-2\right|+C$$

10 $\int \frac{1-5x^2}{x^5+x^3}dx$

$$\frac{1-5x^2}{x^5+x^3}=\frac{1-5x^2}{x^3(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$=\frac{Ax^2(x^2+1)+Bx(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)x^3}{x^3(x^2+1)}$$

$$1-5x^2=Ax^4+Ax^2+Bx^3+Bx+Cx^2+C+Dx^4+Ex^3$$

$$A=-6\ ,\ B=0\ ,\ C=1\ ,\ D=6\ ,\ E=0$$

$$\int\frac{1-5x^2}{x^5+x^3}dx=\int\frac{-6}{x}dx+\int\frac{0}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx+\int\frac{6x+0}{x^2+1}dx$$

$$=-6Ln|x|-\frac{1}{2}x^{-2}+3Ln|x^2+1|+C$$

الحالة الرابعة :

اذا كانت عوامل g(x) غير خطية (من الدرجة الثانية) و متكررة أي ان :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$$

عندئذ التعويض يكون بالشكل التالي :

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+.....+\frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\boxed{11}\ \int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^2+3=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

$$A=0\ ,\ B=2\ ,\ C=0\ ,\ D=1$$

$$\therefore\int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{2}{x^2+1}dx+\underbrace{\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx}_{\#}$$

$$\#\quad x=\tan\theta\Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta\quad ,\ \theta=\tan^{-1}x$$

$$\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}=\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}=\int\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\sin(2\tan^{-1} x)\right) \quad \text{.....\#}$$

$$\therefore \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx = 2\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\sin(2\tan^{-1} x)\right) + C$$

Home Work

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x-1)(x^2+2x+1)} dx \qquad \int \frac{3x-1}{(x-2)(x+5)} dx$$

$$\int \frac{5}{x(x^2-9)} dx \qquad \int \frac{4x^3-x}{(x^2+5)^2} dx$$

$$\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1} dx \qquad \int \frac{1-3x^4}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$$

$$\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4} dx \qquad \int \frac{x^2+2}{x+2} dx$$