المحاضرة التاسعة التكامل العددي:

التعريف الرياضي للتكامل:

لتكن $f\left(x\right)$ دالة حقيقية ومستمرة على الفترة $\left[a,b\right]$ عندئذ فان التكامل الدالة يكون كالاتي :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(b\right) - F\left(b\right)$$

حيث ان F هي الدالة الناتجة من تكامل الدالة f .وتمثل قيمة التكامل المساحة تحت المنحني الدالة بين النقطتين b, a في بعض الأحيان يكون إيجاد الدالة F معقدا او مستحيلا . لذلك نلجا الى تقدير قيمة التكامل $\int_a^b f\left(x\right)dx$ باستخدام الطرق العددية. لاحظ اننا نتكلم عن تقدير التكامل المحدد فقط ,كون ان الصيغة النظرية للتكامل غير المحدد لايمكن ابجادها عدديا . وسنتطرق في الفقرات القادمة الى بعض الطوق المستخدمة في تقدير التكامل عدديا .

طريقة شبه المنحرف Trapezoidal rule:

لتقدير قيمة التكامل $\int_a^b f\left(x\right)dx$ نجزا الفترة $\left[a,b\right]$ الى n من الفترات المتساوية وكالاتي:

$$\left[a,b\right] \Rightarrow \left[\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1\right],\left[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\right],\left[\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3\right].....\left[\mathrm{x}_{n-1},\mathrm{x}_n\right]$$

$$a = \mathrm{x}_0 < \mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2 < \mathrm{x}_3 .... < \mathrm{x}_{n-1} < \mathrm{x}_n = b$$

بحيث يكون طول كل فترة يساوي :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} f\left(x\right)dx + \int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} f\left(x\right)dx + \int_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{x}_3} f\left(x\right)dx + ... + \int_{\mathrm{x}_{n-1}}^{\mathrm{x}_n} f\left(x\right)dx$$

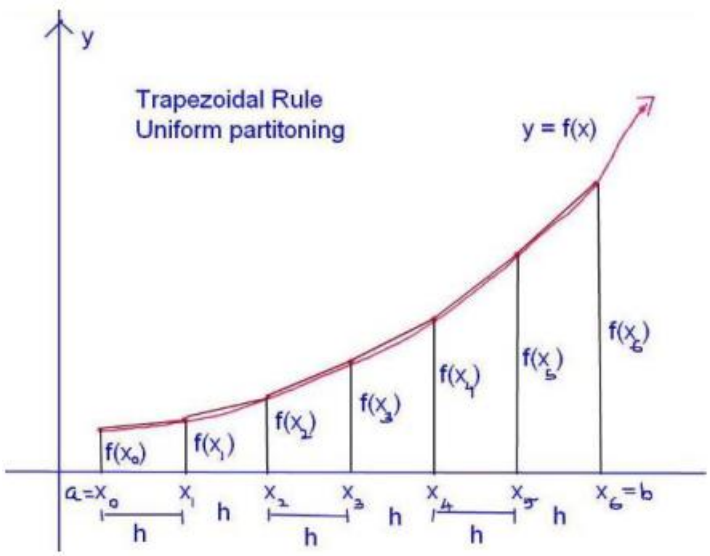
$$\Rightarrow \int_a^b f\left(x\right)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{x}_{i-1}}^{\mathrm{x}_i} f\left(x\right)dx$$

لاحظ ان كل تكامل من التكاملات الجزئية أعلاه يمثل جزء من المساحة تحت المنحني الدالة .وان شكل المساحة ضمن كل فترة جزئية تكون مشابه لشبه المنحرف (لاحظ الشكل رقم 1)لذلك يمكننا حساب مساحة الشبه المنحرف كتقدير للمساحة الجزئية تحت المنحني علما ان مساحة شبه المنحرف تكون كالاتي:

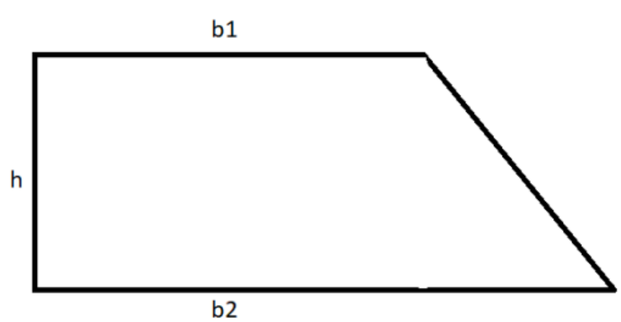
$$Area\ \text{of Trapezoid}=\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)h$$

حيث ان b_2, b_1 يمثلان طولي قاعدتي شبه المنحرف وان h يمثل الارتفاع (لاحظ الشكل رقم 2) .

الشكل(1) المساحة تحت المنحني الدالة وتقديرها باستخدام اشباه المنحرف.



الشكل (2) شبه المنحرف (قائم الزاوية)



اذن وكما موضح في الشكل رقم 1يمكن تقدير كل تكامل جزئي كالاتي:

$$(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right)h + \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)h + ... + \left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)h$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\big) + f(x_n)\Big)$$

Example:

Estimate the integral $\int_{0.5}^{1} x^4 e^x dx$ according to the trapezoidal method when

$h = 0.1$

الحل:

نحدد قيم $x_0, x_1, ...x_n$ حيث ال مقدار الويادة هو 0.1 وبذلك يكون لدينا الفترات الاتية:

$$[0.5,1] = [0.5,0.6],[0.6,0.7],[0.7,0.8],[0.8,0.9][0.9,1]$$

وبالتعويض في الدالة قيم x_0, x_1, x_3, x_4, x_5 في الدالة $f(x) = x^4 e^x$ نحصل على الاتي:

x	$a = x_0 = 0.5$	$x_1 = 0.6$	$x_2 = 0.7$	$x_3 = 0.8$	$x_4 = 0.9$	$b = x_5 = 1$
$f(x)$	0.1030	0.2361	0.4835	0.9116	1.6137	2.7183

$$\int_{0.5}^{1} x^4 e^x dx = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\big) + f(x_5)\Big)$$

$$e^{x}dx = \frac{0.1}{2}\left(0.1030 + 2\left(0.2361 + 0.4835 + 0.9116 + 1.6137\right) + 2.7183\right)$$

$$= 0.4656$$

اذن تكون القيمة التقديرية للتكامل $\int_{0.5}^{1} x^4 e^x dx$ هي 0.4656 وفقا لطريقة شبه المنحرف عندما $h = 0.1$.

لاحظ ان تكامل الدالة $\int_{0.5}^{1} x^4 e^x dx$ يمكن ايجاده رياضيا (القيمة الحقيقية للتكامل) باستخدام قانون التكامل للضرب بين دالتين :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

علما ان التكامل غير المحدد باستخدام هذه الطريقة يتطلب حلا معقدا للغاية حيث تكون صيغة الدالة يعد التكامل كالاتي:

$$\int x^4 e^x dx = e^x \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24\right) + c$$

Example:

Estimate the integral $\int_{0}^{1} x^5 \sqrt{2 - x^3} dx$ according to the trapezoidal method when $n = 4$.

الحل : ستكون قيم x كالاتي:

x	$a = x_0 = 0$	$x_1 = 0.25$	$x_2 = 0.5$	$x_3 = 0.75$	$b = x_4 = 1$
$f(x)$	0	0.0014	0.0428	0.2981	1

والان بالإمكان تقدير التكامل باستخدام طريقة شبه المنحرف كالاتي:

$$\int_0^1 x^5\sqrt{2-x^3}\,dx = \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+2\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\big)+f(x_4)\Big)$$

$$=\frac{0.25}{2}\big(0+2(0.0014+0.0428+0.2981)+1\big)=0.2106$$

اذن تكون القيمة التقديرية للتكامل $\int_0^1 x^5\sqrt{2-x^3}\,dx$ هي 0.2106 وفقا لطريقة شبه المنحرف عندما تكون $n=4$.

علما ان التكامل أعلاه بالإمكان إيجاد الصيغة التظرية له بخطوات معقدة جدا ,حيث تكون صيغة الدالة يعد التكامل كالاتي:

$$\int_0^1 x^5\sqrt{2-x^3}\,dx = -\frac{2}{45}\left(2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}\left(3x^3+4\right)+c$$

من الأمثلة أعلاه يمكن القول بان التكامل العددي يكون اسهل بكثير من التكامل النظري خصوصا في حال استخدام البرامج الحاسوبية لايجاد التكامل.