المحاضرة التاسعة

نظرية المقابل او الثنائي Duality theory

تعتبر نظرية المقابل واحدة من اهم المفاهيم الاساسية في مسائل البرمجة الخطية L.P.
الفكرة الاساسية لنظرية المقابل هي لاي مسألة برمجة خطية يوجد برنامج خطي
مقترن معها يدعى النموذج المقابل بحيث يعطي الحل مسألة البرمجة الخطية
الاصلية ويعطي كذلك حل النموذج المقابل

تكوين النموذج المقابل :- لتكوين النموذج المقابل من المسألة الاصلية للبرمجة
الخطية والتي تدعى المسألة الاصلية نتبع الخطوات التالية :-

1- معاملات دالة الهدف بالنموذج الاولي تصبح ثوابت الجانب
الايمن في النموذج المقابل وبصورة مشابهة ثوابت الجانب
الايمن في النموذج الاولي تصبح معاملات دالة الهدف في المقابل

2- تعكس اشارة القيود من اصغر او يساوي في الاولي الى اكبر او يساوي
في المقابل او من اكبر او يساوي في الاولي الى اصغر او يساوي في المقابل

3- اي عمود في الاولي يعتبر قيد (صف) في المقابل وعليه فان
عدد قيود المقابل تساوي عدد متغيرات الاولي

4- اي قيد في الاولي يتحول الى عمود في المقابل وعليه فان عدد متغيرات
المقابل تساوي عدد قيود الاولي

5- يجب ان يكون النموذج الاولي بالصيغة القانونية ، اي في حالة الـ MaX
فان جميع القيود اقل او يساوي وفي حالة الـ Min جميع القيود اكبر او يساوي

6- مقابل النموذج المقابل هو النموذج الاولي

مثال:-
اكتب النموذج المقابل للنموذج الأولي

النموذج الأولي Primal Model

① $Max\ Z = 5X_1 + 2X_2$

s.t.

$X_1 + X_2 \leq 20$

$2X_1 + X_2 \leq 30$

$-X_1 + 2X_2 \leq 25$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل

النموذج المقابل Dual Model

$Min\ T = 20Y_1 + 30Y_2 + 25Y_3$

s.t.

$Y_1 + 2Y_2 - Y_3 \geq 5$

$Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \geq 2$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

مثال 2:- اكتب النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي

Primal النموذج الأولي

② $Min\ Z = 20X_1 + 4X_2 + 35X_3$

s.t.

$X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 5$

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 2$

$X_1 + X_2 = 4$

يجب تحويل النموذج الى الصيغة القانونية قبل التحويل الى المقابل لدينا القيد الثاني والثالث يجب تحويلهم الى صيغة الجبر اويساوي وذلك بضرب القيد الثاني بالسالب

$(X_1 + X_2 + X_3 \leq 2) * -1 \Longrightarrow -X_1 - X_2 - X_3 \geq -2$

اما القيد الثالث (المساواة) فيتم تحويله الى قيدين (الجبر اويساوي) و (اصغر اويساوي) ثم قيد الاصغر ايضاً يضرب بالسالب ويتحول الى الجبر

أي انه يتم التحويل بالصورة الآتية للقيد الثالث

$X_1 + X_2 = 4$

$X_1 + X_2 \geq 4$

$X_1 + X_2 \leq 4$ $\quad * -1 \Rightarrow -X_1 - X_2 \geq -4$

وبالتالي فان النموذج الاولي بالصيغة القانونية يصبح بالشكل الآتي

Primal Model

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 40X_2 + 35X_3$$

s.t

$$X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 5$$
$$-X_1 - X_2 - X_3 \geq -2$$
$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$-X_1 - X_2 \geq -4$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Dual Model

$$\text{Max } T = 5Y_1 - 2Y_2 + 4Y_3 - 4$$

s.t.

$$Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \leq 20$$
$$2Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \leq 40$$
$$-Y_1 - Y_2 \leq 35$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

وبشكل عام

Primal

$$\text{Max (Min } Z) = CX$$

s.t.

$$AX \leq (\geq)\ b$$
$$X \geq 0$$

$\Longleftrightarrow$

Dual

$$\text{Min (Max) } T = Yb$$

s.t.

$$YA \geq (\leq)\ C$$
$$Y \geq 0$$

التفسير الاقتصادي للنموذج المقابل

مسائل البرمجة الخطية تفسر على انها سوف تستخدم لتخصيص الموارد فيما بين الفعاليات والموارد تكون اما غزيرة (وهي تلك الموارد التي زيادتها لا تؤثر على الحل الامثل للنموذج) والقيد الذي يتمثل بموارد غزيرة يعرف بأنه قيد غير ملزم بحيث أن هذا القيد لا يمر بنقطة الحل الامثل

اما النوع الآخر من القيود فيعرف بالموارد النادرة وهي تلك الموارد التي زيادتها تؤثر على الحل الامثل للنموذج والقيد الذي يمثل الموارد النادرة يعرف بانه قيد ملزم بحيث أن هذا القيد يمر بنقطة الحل الامثل وعلى هذا الاساس فان الموارد النادرة هي التي تحدد الحل الامثل للنموذج.

اذا رغب صانع القرار في معرفة مدى تأثير زيادة الموارد النادرة على الحل الامثل فانه سوف يلجأ الى متغيرات النموذج المقابل او ما يطلق عليها اسعار الظل او هي التي تمثل المعدل الذي تزداد به قيمة دالة الهدف نتيجة زيادة وحدة واحدة والزيادة يجب ان لا تكون كبيرة لكي تبقى المتغيرات الاساسية الحالية مثلى وعلى هذا الاساس فان قيمة سعر الظل للموارد الغزيرة هو صفر

ن قيمة اسعار الظل او متغيرات فائض المقابل يمكن الحصول عليها من جدول السمبلكس النهائي الذي يمثل الحل الامثل للنموذج الاولي حيث انها تمثل قيم المتغيرات الوهمية في صف الاسعار النسبية وكتوضيح نورد المثال الآتي

$$Max\ Z = 20X_1 + 25X_2$$

s.t.

$$2X_1 + 3X_2 \leq 40$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$3X_1 + X_2 \leq 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الجدول النهائي للحل بالسمبلكس (النموذج الاولي)

C_b	B.V \ C_j	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
0	S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
25	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-11	-3	Z = 310

بملاحظة جدول السمبلكس النهائي فان الحل الامثل للنموذج الاولي هو

$$X_2^* = 6,\ X_1^* = 8,\ Z^* = 310$$

في جدول الحل الامثل للنموذج الاولي (Primal) يمكن ان نوجد الحل الامثل للنموذج الثنائي (Dual)

$$T_2^* 310$$

$$Y_1^* = 0;\ Y_2^* = 11;\ Y_3^* = 3$$