1-الاستقراء الداخلي الخطي باستخدام متعدد حدود نيوتن للفروق المقسومة (linear interpolation Using Newton's Polynomial for Dividing Differences):

للتذكير,تتوفر لدينا لدينا ازواج القيم الاتية $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\ \ldots ,\ (x_n,y_n)$ حيث ان n عدد صحيح موجب ,ومشكلتنا الرياضية هي تقدير قيمة y عند قيمة معلومة لx , وان $x \neq x_i$ لجميع قيم i=0,1,2,….n

يتم بناء دالة الاستقراء الداخلي الخطي في طريقة نيوتن للفروق كالاتي:

$$y = B_0 + B_1\left(x - x_0\right) \text{..........}(1)$$

ولتقدير B_0 & B_1 في المعادلة أعلاه نحتاج لاختيار زوجين فقط من البيانات المتوفره لدينا وهما $(x_a,y_a),(x_b,y_b)$ حيث يتم الاختيار بالطريقة نفسها التي تطرقنا اليها في الاستقراء الداخلي المباشر وبالشروط السابقة نفسها(راجع المحاضرة الأولى للتفاصيل).

ملاحظة مهمة(Important note):

سيتم إعادة ترميز الزوج الأول الذي تم اختياره من (x_a,y_a) الى (x_0,y_0) وكذلك بالنسبة ل(x_b,y_b) يرمز ب (x_1,y_1)وهكذا.والغاية من ذلك تسهيل تمثيل المعادلات في طريقة نيوتن للفرق . وذلك لايعني اننا اخترنا الزوجين الاولين من البيانات الاصلية , وانما اعدنا ترميز الأزواج المختاره باستخدام الترقيم من الصفر ....$0,1,2,$بدلا من الاحرف ....$a,b,c,$

بذلك فان في x_0 المعادلة رقم (1) أعلاه هي x_a في زوج البيانات الأول الذي وقع الاختيار عليه أي ان $x_0 = x_a$ وان $x_1 = x_b$, وكذلك فان $y_0 = y_a$ وان $y_1 = y_b$ بعد ذلك نقوم بتعويض الأزواج المختارة في المعادلة رقم (1) وكالاتي :

$$y_0 = B_0 + B_1\left(x_0 - x_0\right)$$

$$\Rightarrow B_0 = y_0 \text{..........}(2)$$

كذلك بالنسبة للزوج (x_1,y_1):

$$y_1 = B_0 + B_1\left(x_1 - x_0\right) \text{..........}(3)$$

وبما انه $B_0 = y_0$من المعادلة (2) أعلاه اذن نعوض في المعادلة(3) :

$$y_1 = y_0 + B_1\left(x_1 - x_0\right)$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{y_{1-}\ y_0}{x_1 - x_0} \quad ....(4)$$

تسمى B_0 بالفرق المقسوم الصفري (0^{th} divided difference) ويرمز لها $f\left[x_0\right]$ بينما تسمى B_1 بالفرق المقسوم الاول 1^{st} divided difference) ويرمز لها $f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right]$ أي ان:

$$B_0 = y_0 = f\left[x_0\right] \quad ....(2)$$

$$B_1 = \frac{y_{1-}\ y_0}{x_1 - x_0} = f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right] \quad ....(4)$$

وبعد حساب قيم B_0 & B_1 يتم تطبيق المعادلة رقم (1) على قيمة x لتقدير قيمة y حيث ان صلاحية المعادلة (1) تقتصر على قيم x الواقعة ضمن الفترة (x_b, y_b) التي تم اختبارها في البداية .

2- الاستقراء الداخلي التربيعي باستخدام متعدد حدود نيوتن للفروق المقسومة:(Quadratic Interpolation Using Newton's Polynomial for Dividing Differences:

لدينا نفس المشكلة الرياضية أعلاه وهذا يتم بناء دالة الاستقراء التربيعي في طريقة نيوتن للفروق المقسومة كالاتي :

$$y = B_0 + B_1\left(x - x_0\right) + B_2\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) \quad ....(5)$$

ولتقدير B_0, B_1, B_2 في المعادلة (5) أعلاه نحتاج لاختيار ثلاثة ازواج من البيانات المتوفرة لدينا $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_C, y_C)$ حيث يتم ا لاختياربالطريقة نفسها التي تطرقنا اليها في الاستقراء الداخلي التربيعي المباشروبالشروط السابقة نفسها (راجع المحاضرة الثانية للتفاصيل .ثم نعيد الترميز وكالاتي:

$$\left(x_0\ ,\ y_0\right) = \left(x_a\ ,\ y_a\right), \quad \left(x_1\ ,\ y_1\right) = \left(x_b\ ,\ y_b\right), \quad \left(x_2\ ,\ y_2\right) = \left(x_c\ ,\ y_c\right)$$

ولذلك فان x_0, x_1 في المعادلة (5) أعلاه هي قيمتي x في زوجي البيانات الأول والثاني الذين وقع الاختيار عليهما بعد ذلك نقوم بتعويض الأزواج الثلاثة في المعادلة رقم (5) ,وكالاتي :

الزوج $\left(x_0\ ,\ y_0\right)$:

$$y_0 = B_0 + B_1\left(x_0 - x_0\right) + B_2\left(x_0 - x_0\right)\left(x_0 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow B_0 = y_0 = f\left[x_0\right]................(6)$$

كذلك بالنسبة للزوج الثاني $\left(x_1 \ , \ y_1\right)$:

$$y_1 = B_0 + B_1\left(x_1 - x_0\right) + B_2\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_1\right)...........(7)$$

وبما انه $B_0 = y_0$ من المعادلة (6) أعلاه اذن نعوض في المعادلة (7).

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + B_1\left(x_1 - x_0\right)$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{y_{1-}\ y_0}{x_1 - x_0} = f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right]........(8)$$

كذلك بالنسبة للزوج الثالث $\left(x_2 \ , \ y_2\right)$:

$$y_2 = B_0 + B_1\left(x_2 - x_0\right) + B_2\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)............(9)$$

وبتعويض المعادلتين (6)و(8) في المعادلة (9).

$$y_2 = y_0 + \frac{y_{1-}\ y_0}{x_1 - x_0}\left(x_2 - x_0\right) + B_2\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\dfrac{y_{2-}\ y_0}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{\left(x_2 - x_1\right)}$$

او بمكن صياغتها كالاتي:

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\dfrac{y_{2-}\ y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{\left(x_2 - x_0\right)}$$

واجب برهن الخطوة الاولى

تسمى B_2 في صيغتها الموضحة في المعادلة رقم (10) بالفرق المقسوم الثاني (2^{th} divided difference) ويرمز لها $f[x_0, x_1, x_2]$. أي ان :

$$B_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

.........(10)

حيث ان $f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ يسمى الفرق المقسوم الأول بين (x_0, x_1) وان

$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ يسمى الفرق المقسوم الاول بين (x_1, x_2). اذن .

$$B_0 = f[x_0], \quad B_1 = f[x_0, x_1], \quad B_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

وبعد حساب قيم B_0, B_1, B_2 يتم تطبيق المعادلة رقم (5) على قيمة x لتقدير قيمة y حيث ان صلاحية المعادلة (5) تقتصر على قيم x الواقعة ضمن مدى القيم الثلاثة (x_a, x_b, x_c) التي تم اختيارها في البداية.

Example:

The table below shows the values of the natural logarithm of some real numbers, according to the indicator about each of them:

7	6.3	6	5.5	4.5	4	x
1.945910	1.840550	1.791759	1.704748	1.504077	1.386294	y=ln(x)

It is required : to estimate the value of the natural logarithm of the number x=5 using linear interpolation and quadratic using to the Newton polynomial method for the divided differences.

الحل:

1- الاستقراء الداخلي الخطي(linear interpolation): ستكون دالة الاستقراء الخطي كالاتي:

$$y = B_0 + B_1\left(x - x_0\right)$$

لاحظ ان $\left(x_a \ , \ y_a\right) = \left(4.5,1.504077\right), \left(x_b \ , \ y_b\right) = \left(5.5,1.704748\right)$ كونها اقرب قيمتين على x=5 اذن نعيد الترميز :

$$\left(x_0 \ , \ y_0\right) = \left(x_a \ , \ y_a\right) = \left(4.5,1.504077\right)$$

$$\left(x_1 \ , \ y_1\right) = \left(x_b \ , \ y_b\right) = \left(5.5,1.704748\right)$$

وبتطبيق المعادلتين (2),(4) لحساب الفرقين المقسومين الصفري والأول :

$$B_1 = f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1.704748 - 1.504077}{5.5 - 4.5} = 0.200671$$

وبالتعويض قيم B_0, B_1 بدالة الاستقراء الداخلي الخطي :

$$y = 1.504077 + 0.200671\left(x - 4.5\right)$$

حيث تقتصر صلاحية المعادلة الأخيرة على الفترة (4.5,5.5)

اذن تقدر قيمة اللوغارتم الطبيعي للعدد 5 كالاتي :

$$y = 1.504077 + 0.200671\left(5 - 4.5\right) = 1.604413$$

2- الاستقراء الخطي التربيعي(Quadratic Linear Interpolation):

$$y = B_0 + B_1\left(x - x_0\right) + B_2\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)$$

نحتاج لاختيار ثلاثة ازواج وفق الشروط المذكورة في المحاضرة 2. لاحظ ان :

$$\left(x_a \ , \ y_a\right) = \left(4.5,1.504077\right)$$

$$\left(x_b \quad , \; y_b\right)=\left(5.5,1.704748\right)$$

$$\left(x_c \quad , \; y_c\right)=\left(6,\; 1.791759\right)$$

نعيد الترميز وكالاتي:

$$\left(x_0 \quad , \; y_0\right)=\left(x_a \quad , \; y_a\right)=\left(4.5,1.504077\right)$$

$$\left(x_1 \quad , \; y_1\right)=\left(x_b \quad , \; y_b\right)=\left(5.5,1.704748\right)$$

$$\left(x_2 \quad , \; y_2\right)=\left(x_c \quad , \; y_c\right)=\left(6,\; 1.791759\right)$$

بالإمكان أيضا اختبار الزوج المقابل لـ4= x بدلا من الزوج المقابل ل x=6.

والان بتطبيق المعادلات (6),(8) و (10) لحساب الفروق المقسومة الصفري والأول والثاني :

$$B_0 = f\left[x_0\right] = y_0 = 1.504077$$

$$B_1 = f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right] = \frac{y_{1-}\; y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1.704748 - 1.504077}{5.5 - 4.5} = 0.200671$$

$$B_2 = f\left[x_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\right] = \frac{f\left[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\right] - f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right]}{\left(x_2 - x_0\right)}$$

حيث ان :

$$f\left[x_0, \mathrm{x}_1\right] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1.704748 - 1.504077}{5.5 - 4.5} = 0.200671$$

$$f\left[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\right] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.791759 - 1.704748}{6 - 5.5} = 0.174022$$

وبالتعويض في معادلة الفرق المقسوم الثاني :

$$B_2 = \frac{0.174022 - 0.200671}{6 - 4.5} = -0.017766$$

اذن تكون دالة الاستقراء كالاتي :

$$y = B_0 + (x - x_0) B_1 + (x - x_0)(x - x_1) B_2$$

$$y = 1.504077 + 0.200671(x - 4.5) - 0.017766(x - 4.5)(x - 5.5)$$

وأيضا تكون صلاحيتها مقتصرة على قيم x الواقعة ضمن المدى (4.5, 6) والان نعوض x=5 لنحصل على :

$$y = 1.504077 + 0.200671(5 - 4.5) - 0.017766(5 - 4.5)(5 - 5.5)$$

$$y = 1.608854$$

Homework:

For the example data above, it is required to estimate the value of the natural of logarithm the number x=5.8 using the dividing differences method in quadratic interpolation only.