that machine 2 will become inoperative during the same period, and suppose that $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{4}$. We shall determine the probability that at least one of the machines will become inoperative during the given period.

The prob. $P(A \cap B)$ that both machines will become inoperative during the period is:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Therefore, the prob. $P(A \cup B)$ that at least one of the machines will become inoperative during the period is

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة: اذا كان الحدثان A و B متنافيين Mutually exclusive
فلا يمكن ان يكونا مستقلين.

If A and B are two mutually exclusive events
then A and B are not Independent.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0$ where $P(A \cap B) = 0$

اي بمعنى ان تقاطعهما مجموعة خالية

اذا كان الحدثان A و B غير متنافيين not m.e.
فانهما يمكن ان يكونا مستقلان (لان تقاطعهما مجموعة غير خالية)

If A and B are two not m.e. ~~events~~ event, they can be Independent

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

and if they are independent then

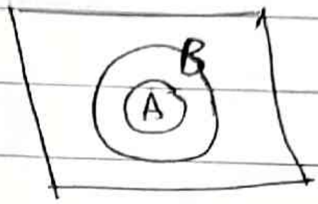
فاذا كانا مستقلين فان

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

* If $A \subset B$ then

* إذا كانت $A \subset B$ ان



$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \cancel{P(A)} + P(B) - \cancel{P(A)}$

$\therefore P(A \cup B) = P(B)$

* If A and B are ~~not~~ dependent then — إذا كان A و B غير مستقلة

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

EX: (2)

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

are A and B Independent?

Sol.:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$(A \cap B) = \{2, 4\}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\because P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$

$\therefore$ A and B are Independent events.

Theorem:

If A and B are two independent events. Then:

1- A' and B are also independent.

2- A and B' are also independent.

3- A' and B' ar also independent.

Prove:

1- $P(A' \cap B) \stackrel{?}{=} P(A') \cdot P(B)$

$P(A' \cap B) = P(B/A)$

$= P(B) - P(A \cap B)$

$\because$ A and B independent then

$= P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$= P(B)(1 - P(A))$

$\therefore P(A' \cap B) = P(B) \cdot P(A')$

2- $P(A \cap B') \stackrel{?}{=} P(A) P(B')$

$P(A \cap B') = P(A/B)$

$= P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A) P(B)$

$= P(A) (1 - P(B))$

$\therefore P(A \cap B') = P(A) \; P(B')$

3- $P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$ De morgan's Low

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= [1 - P(A)] - P(B) + P(A)P(B)$

$= P(A') - P(B)[1 - P(A)]$

$= P(A') - P(B) \; P(A') = P(A')[1 - P(B)]$

$\therefore P(A' \cap B') = P(A') P(B')$

حوادث
الاستقلالية لثلاثة أو أكثر

Independence of three or more events

Definition:

The K events $A_1, A_2, \ldots, A_K$ are independent if, for every subsets $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ij}$ of j of these events, $(j = 2, 3, \ldots, K)$

تكون الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_j$ حوادث مستقلة اذا كان

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_j)$$

~~اذا كانت لدينا الحوادث~~ A, B, C الاربعة

تكون الحوادث A, B, C مستقلة اذا تحققت العلاقات الآتية

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

واذا تحققت العلاقات الثلاثة الأولى فقط تكون الحوادث A, B, C مستقلة مثنى مثنى (زوج - زوج) Pairwise

EX:

let $S = \{123, 132, 213, 231, 312, 321, 111, 222, 333\}$

اذا كان لدينا فضاء العينة S

وان كل عنصر من عناصر فضاء العينة S له احتمال ظهور $= \frac{1}{9}$

and each of the nine elementary event in S occurs probability $\frac{1}{9}$, let A_K be the event that the K-th digit is 1, $K = 1, 2, 3$ then

لنفرض ان A_K هي حادثة تمثل المرتبة K (اي الرقم الذي يمثل رقم الحادثة A يكون فيها يساوي (واحد)

sol:

$K=1$ $\quad A_1 = \{111, 123, 132\}$, $P(A_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ — اي ان في A_1 جميع عناصر يكون الرقم الاول هو (1)

$K=2$ $\quad A_2 = \{111, 213, 312\}$, $P(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ — وفي A_2 يكون جميع عناصرها الرقم الثاني فيها هو (1)،

$K=3$ $\quad A_3 = \{111, 231, 321\}$, $P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ — وفي A_3 جميع العناصر يكون فيها الرقم الثالث هو (1).

$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{111\}$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9}$

$$\left.\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)\cdot P(A_2) = \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}\\
P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)\cdot P(A_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\\
P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}
\end{aligned}\right\}\text{independent}$$

$$\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} = \{111\}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9}$$

$$P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$\therefore P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$

$\Longrightarrow$ A_1, A_2 and A_3 are pairwise independent