اختبار الحل الاساسي الابتدائي المقبول للحصول على الحل الأمثل

- بعد ايجاد الحل الاساسي الابتدائي المقبول باحدى الطرق السابقة للحصول على اقل كلفة ممكنة فان الخطوة الثانية هي اختبار هذا الحل للتوصل الى الامثلية ومن طرق اختبار الحل الابتدائي طريقة المسار المتعرج .

طريقة المسار المتعرج

- ان عدد المربعات المشغولة في نموذج النقل والتي تمثل المتغيرات الاساسية في الحل الاساس الابتدائي تساوي $(M+N-1)$ اما المربعات غير المشغولة فتمثل بالمتغيرات غير الاساسية والهدف الرئيس للاختبار هو دراسة تأثير المتغيرات غير الاساسية على قيمة دالة الهدف فيما لو تحولت هذه المتغيرات الى اساسية وتكون خطوات الاختبار كما يلي :-

1- تحديد المتغير الداخل من المتغيرات غير الاساسية والخارج من المتغيرات الاساسية ويتم تحديد الداخل برسم مسارات مغلقة للمتغيرات غير الاساسية حيث يتكون المسار من مجموعة من المستقيمات المتعاقبة افقياً وعمودياً بحيث تكون بداية المسار هو المتغير غير الاساسي ونهاية كل مستقيم هو المتغير الاساسي .

2- ايجاد كلفة كل مسار $(z_j - c_j)$ وذلك باعطاء اشارات متعاقبة للمتغيرات بحيث تبدأ بالمتغير غير الاساسي باشارة موجبة ثم سالبة ثم موجبة وهكذا .-

3- اذا كانت قيمة $(z_j - c_j)$ اكبر او تساوي صفر للمسارات فانه لا يمكن ايجاد حل أمثل افضل من الحل الابتدائي ويعتبر الحل الابتدائي هو الحل الأمثل

4- اذا كانت احدى قيم (z_{ij}) سالبة عندئذ نختار احرفية سالبة (اي نختار القيمة الأكثر سالبية) ويعتبر المتغير غير الاساسي الذي يملك احرفية سالبة لـ (z_{ij}) متغيراً داخلاً

5- بعد تحديد المتغير الداخل تحدد المتغير الخارج من اركان المسار الذي حدد سابقاً وذلك باختيار قيمة المتغير x_i الاصغر الذي يحمل الاشارة السالبة وهذا يمثل المتغير الخارج وتحويل قيمته الى المتغير الداخل

6- لموازنة النموذج نقوم باضافة قيمة المتغير من الركن الذي اشارته موجبة وطرح قيمة المتغير من الركن الذي اشارته سالبة حتى لا تختلف موازنة النموذج

7- يتم استخراج داله الهدف وايجاد مسارات جديدة للمتغيرات غير الاساسية لاختبار الحل الامثل.

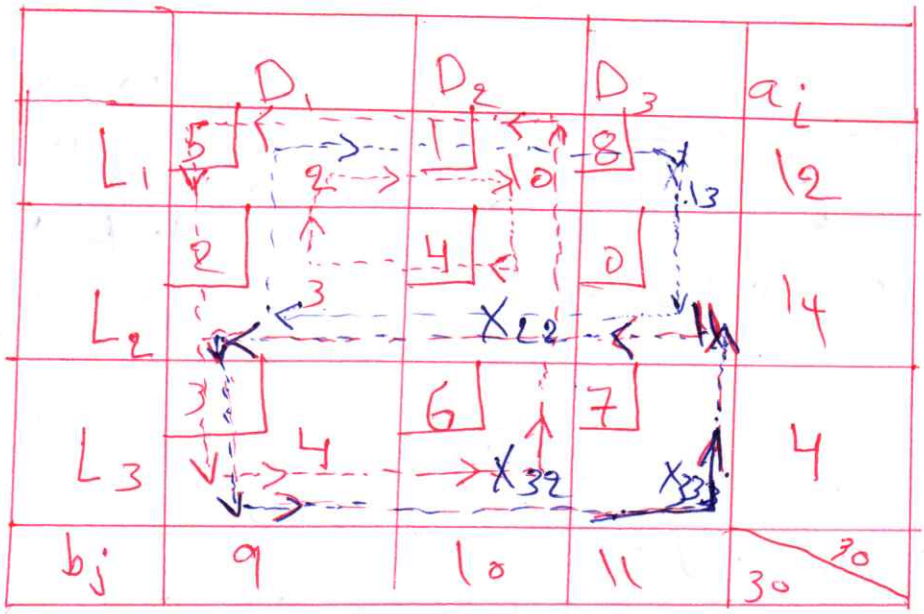
القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق

1- يجب ان يبدأ المسار المغلق وينتهي عند الخلية الفارغة المراد تقييمها

2- يجب ان يتألف المسار المغلق من مجموعة من المتغيرات الافقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق

3- وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة

مثال 6: من بيانات الجدول الآتي اختبر فيما اذا كانت المسألة ممثلة (اختبر فيما اذا كان الحل الابتدائي امثل).



* - المربعات التي تحتوي على الارقام تعتبر متغيرات اساسية والمربعات التي تحتوي على X_{ij} تعتبر متغيرات غير اساسية

$$T.C = Z = (5*2) + (1*10) + (2*3) + (0*11) + (3*4) = 38$$

نبدأ بالمسارات للمتغيرات غير الاساسية ويجب ان يكون المسار مغلق (نجد المسار للمربعات التي ليس لها قيم) اي X_{13} و X_{22} و X_{32} و X_{33}

المسار للمتغير غير الاساسي — الكلفة

$X_{13} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{13}$ (+ − + −)

$\hat{C}_{13} = 8 - 0 + 2 - 5 = 5$

$X_{22} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{12} \to X_{22}$ (+ − + −)

$\hat{C}_{22} \Rightarrow 4 - 2 + 5 - 1 = 6$

$X_{32} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{31} \to X_{32}$ (+ − + − +)

$\hat{C}_{32} = 6 - 1 + 5 - 3 = 7$

$X_{33} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{31} \to X_{33}$

$\hat{C}_{33} = 7 - 0 + 2 - 3 = 6$

بما ان جميع المسارات موجبة اذن يعتبر الحل الاساسي الابتدائي هو الامثل

اذن لا يوجد اي متغير غير اساسي داخل ولا يوجد متغير خارج

مثال-7:- جد الحل الامثل من جدول الحل الاساسي الابتدائي

من \ الى	D_1	D_2	D_3	العرض
L_1	5	3	8	12
	9	3	X_{13}	
L_2	2	4	0	14
	X_{21}	7	7	
L_3	3	6	7	4
	X_{31}	X_{32}	4	
الطلب	9	10	11	30 / 30

الحل اولاً نبدأ بإيجاد كلفة كل مسار ($\hat{C}_{ij}$) وذلك باعطاء اشارات متعاقبة للمتغيرات بحيث نبدأ بالمتغير الغير الاساسي باشارة موجبة ثم سالبة ثم موجبة وهكذا والمتغيرات غير الاساسية هي المتغيرات الخلايا التي لم يتم تخصيص اي وحدة لها اي (X_{13} ، X_{21} ، X_{31} ، X_{32}).

نجد الملاحظة عند اختيار المسار اننا نبدأ بالمتغير الغير اساسي ويتم التحرك والتنقل افقياً وعمودياً للمتغيرات الاساسية بحيث يتم الرجوع الى المتغير الغير الاساسي الذي ابتدأ بالمسار

لاحظ ان الحركة تكون بمسار عمودي وافقي ولا يصح ولا يجوز التنقل باتجاه مائل

$X_{13}^{+} \rightarrow X_{23}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{13}$

$\hat{C}_{13} = 8 - 0 + 4 - 1 = 11$

$X_{21}^{+} \rightarrow X_{11}^{-} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow X_{22}^{-} \rightarrow X_{21}$

$C_{21} = 2 - 5 + 1 - 4 = (-6)$

$X_{31}^{+} \rightarrow X_{11}^{-} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow X_{22}^{-} \rightarrow X_{23}^{+} \rightarrow X_{33}^{-} \rightarrow X_{31}$

$C_{31} = 3 - 5 + 1 - 4 + 0 - 7 = (-12)$

$X_{32}^{+} \rightarrow X_{22}^{-} \rightarrow X_{23}^{+} \rightarrow X_{33}^{-} \rightarrow X_{32}$

$C_{32} = 6 - 4 + 0 - 7 = (-5)$

- بملاحظة الكلف للمسارات نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني ان الحل الابتدائي قد يكون غير امثل و بهذا من المسارات السالبة نختار القيمة الأكثر سالبية وهي للمتغير غير الاساسي X_{31} والتي تساوي (-12)

بعد أن تم تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج وبعد أن تم موازنة الجدول نعيد كتابة الجدول ومن ثم اختبار الأمثلية

من \ إلى	D_1	D_2	D_3	العرض
L_1	5	1	8	12
	5	7	X_{13}	
L_2	2	4	0	14
	X_{21}	3	11	
L_3	3	6	7	14
	4	X_{32}	X_{33}	
الطلب	9	10	11	30 / 30

$$\overset{-}{X_{13}} \longrightarrow \overset{+}{X_{12}} \longrightarrow \overset{-}{X_{22}} \longrightarrow \overset{+}{X_{23}} \longrightarrow X_{13}$$

$$\hat{C}_{13} = 8 - 1 + 4 - 0 = 11$$

$$\overset{+}{X_{21}} \longrightarrow \overset{-}{X_{11}} \longrightarrow \overset{+}{X_{12}} \longrightarrow \overset{-}{X_{22}} \longrightarrow \overset{+}{X_{21}}$$

$$\hat{C}_{21} = 2 - 5 + 1 - 4 = -6$$

$$\overset{+}{X_{32}} \longrightarrow \overset{-}{X_{31}} \longrightarrow \overset{+}{X_{11}} \longrightarrow \overset{-}{X_{12}} \longrightarrow X_{32}$$

$$\hat{C}_{32} = 6 - 3 + 5 - 1 = 7$$

$$\overset{+}{X_{33}} \longrightarrow \overset{-}{X_{23}} \longrightarrow \overset{+}{X_{22}} \longrightarrow \overset{-}{X_{12}} \longrightarrow \overset{+}{X_{11}} \longrightarrow \overset{-}{X_{31}} \longrightarrow X_{33}$$

$$\hat{C}_{33} = 7 - 0 + 4 - 1 + 5 - 3 = 12$$

هنا المسار السالب الوصيد للمتغير X_{21} فيمثل المتغير الداخل ولتحديد الخارج نتبع نفس الخطوات في المرحلة الأولى

$\overset{-}{X_{11}}$	و	$\overset{-}{X_{22}}$
5		(3)

إذن المتغير X_{22} هو المتغير الخارج لأن بالمسار القيم السالبة هي X_{11} و X_{22} والوصلات الثلاثة هي $X_{22}=3$ وبهذا نضيف ونطرح (3) على مسار X_{21} أي كل متغيرات المسار وسالبة نطرح منه 3 وكل متغير ذات الإشارة موجبة نضيف له 3

لغيب موازنة التوزيع

$X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21}$

$3 + 3 = 3$ ، $5 - 3 = 2$ ، $7 + 3 = 10$ ، $3 - 3 = 0$

3 ، 2 ، 10 ، 0

شرات

والوحدات

لغيد كتابة الجدول بعد تحديد المتغير الداخل والخارج وموازنة التوزيع

من \ الى	D_1	D_2	D_3	العرض
L_1	5 (2)	1 (10)	8 (X_{13})	12
L_2	2 (3)	4 (X_{22})	9 (11)	14
L_3	3 (4)	6 (X_{32})	7 (X_{33})	14
الطلب	9	10	11	30 \ 30

$X_{13} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{13}$

$\hat{c}_{13} = 8 - 5 + 2 - 9 = 5 \leftarrow +$

$X_{22} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{22}$

$\hat{c}_{22} = 4 - 1 + 5 - 2 = 6 \leftarrow +$

$X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32}$

$\hat{c}_{32} = 6 - 3 + 5 - 1 = 7 \quad +$

$X_{33} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{33}$

$\hat{c}_{33} = 7 - 9 + 2 - 3 = 6 \quad +$

بما انه جميع القيم موجبة اذن يعتبر هذا الجدول جدول الحل الامثل

$T.C = (5 \times 2) + (1 * 10) + (2 * 3) + (0 * 11) + (3 * 4)$

$= 38$

اختبار الامثلية بطريقة المسار المتعرج

مثال: اختبر امثلية مشكلة النقل التالية بواسطة المسار المتعرج

من \ الى	D_1	D_2	a_i
L_1	4 — X_{11}	8 — 60	60
L_2	7 — 35	5 — 5	40
L_3	3 — 70	10 — X_{32}	70
b_j	105	65	$\sum a_i = 170$ / $\sum b_j = 170$

الحل: قبل البدء بالحل نتأكد من تحقق قاعدة التوزيع اي $OC = M+n-1$

$3+2-1 = 4 = M+n-1$

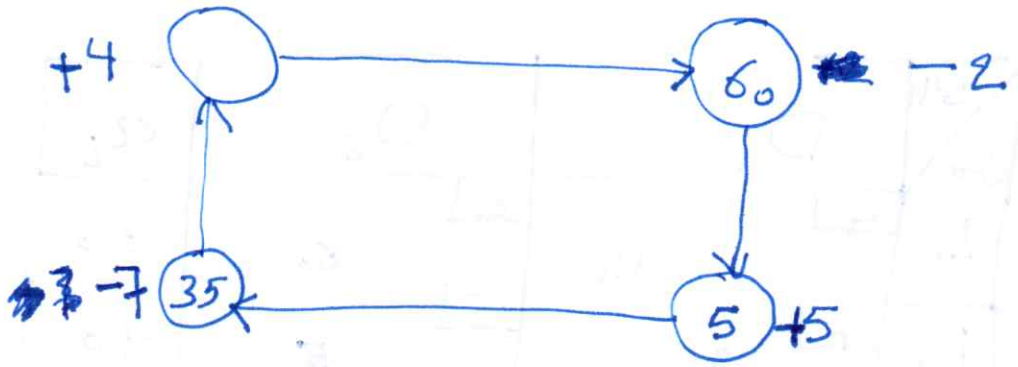
لدينا عدد المتغيرات الاساسية المشغولة بجدول الحل الاول تساوي (4) خلايا اي أن $OC = M+n-1 = 4$

بعد التحقق من القاعدة نبدأ بالحل:-

ان المتغيرات غير الاساسية هي X_{11} للخلية L_1D_1 و X_{32} للخلية L_3D_2

سيتم تقييم اثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة L_1D_1 , L_3D_2 وذلك بحساب الكلفة غير المباشرة لكل خلية وكالآتي:-

الخلية L_1D_1 نرسم المسار المغلق للمتغير غير الاساسي X_{11} ونحسب الكلفة المقدرة للمتغير X_{11}



المسار المغلق للخلية L_1D_1

ملاحظة: ① الارقام داخل الدوائر تمثل عدد الوحدات المشحونة داخل كل خلية

② الارقام التي فارغ الدوائر تمثل كلفة كل خلية من الجدول السابق للمثال

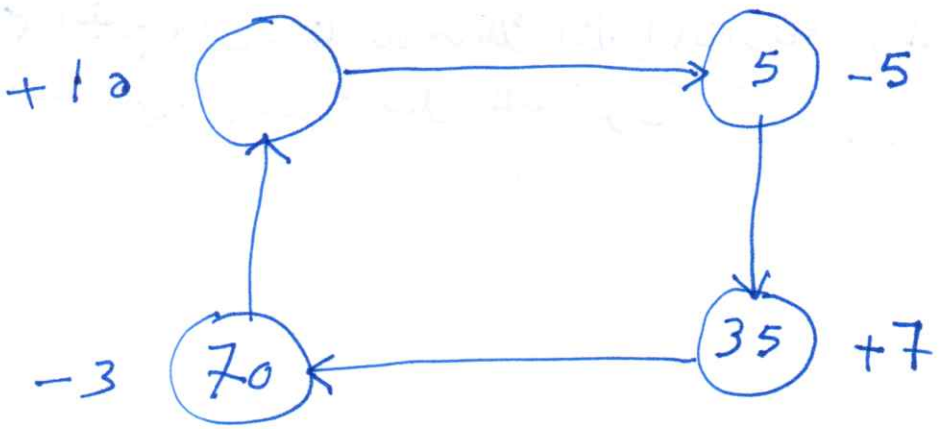
اولاً: مسار X_{11}

$$X_{11}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{21}^{-} \rightarrow X_{11}$$

الكلفة المقدرة للمتغير X_{11}

$$\hat{C}_{11} = C_{11} - C_{12} + C_{22} - C_{21}$$
$$\hat{C}_{11} = 4 - 2 + 5 - 7 = 0$$

ثانياً: مسار X_{32}



مسار X_{23}

$$X^{+}_{32} \longrightarrow \bar{X}_{22} \longrightarrow X^{+}_{21} \longrightarrow \bar{X}_{31} \longrightarrow X_{32}$$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - C_{22} + C_{21} - C_{31}$$
$$= 10 - 5 + 7 - 3 = +9$$

بما ان الكلف المقدرة موجبة او صفر فان الحل يعد امثلاً ولا يمكن ان يدخل اي متغير اساسي للحل ولا يخرج اي متغير اساسي من الحل

مثال 2: اختبر امثلية مشكلة النقل التالية

من \ الى	D_1	D_2	D_3	العرض a_i
L_1	5 — 9	1 — 3	8 — X_{13}	12
L_2	2 — X_{21}	4 — 7	5 — 7	14
L_3	3 — X_{31}	6 — X_{32}	7 — 4	4
الطلب b_j	9	10	11	$\sum a_i = 30$ / $\sum b_j = 30$

الحل: من الجدول اعلاه يتضح وجود اربعة خلايا فارغة هي الخلايا

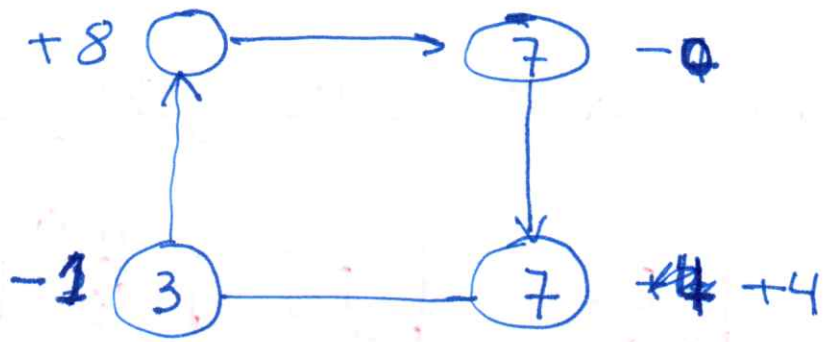
$L_3 D_1$ و $L_2 D_1$ و $L_1 D_3$ و $L_3 D_2$

قبل البدء بالحل نطبق قاعدة التوزيع $OC = 5$

$M+n-1 = 3+3-1 = 5$

$\therefore OC = M+n-1 = 5$ وبعد تحقيق الشرط يتم تقييم اثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وذلك بحساب الكلفة غير المباشرة لكل خلية وكالآتي

أولاً الخلية L_1D_3 :- نرسم المسار المغلق للمتغير غير الاساسي X_{13} وحسب الكلفة المقدرة له



مسار X_{13}

$X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{24} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13}$

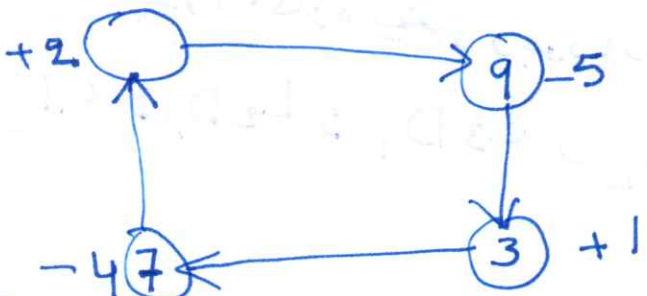
الكلفة المقدرة للمتغير X_{13}

$\hat{C}_{13} = C_{13} - C_{23} + C_{24} - C_{12}$

$\hat{C}_{13} = 8 - 0 + 4 - 1 = 11$

الكلفة غير المباشرة اكبر من الصفر

ثانياً الخلية L_2D_1



المسار المغلق لـ X_{21}

$X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21}$

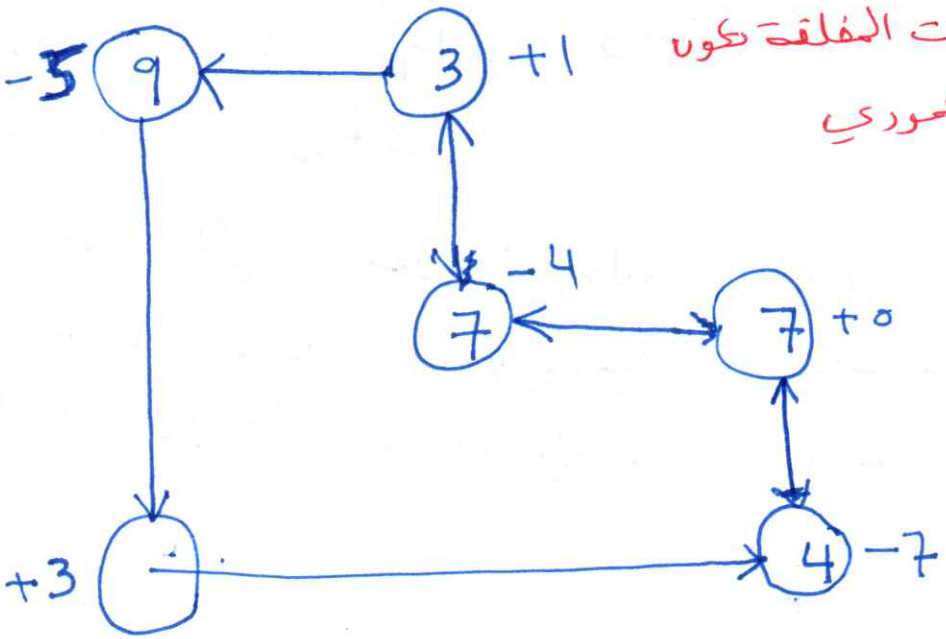
الكلفة المقدرة لـ X_{21}

$\hat{C}_{21} = C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22}$

$\hat{C}_{21} = 2 - 5 + 1 - 4 = -6$

ثالثاً مسار X_{31}

نرسم المسار المغلق للمتغير X_{31} للخلية L_3D_1



لاحظ ان المسارات المغلقة تكون بمستوى افقي وعمودي ولا يمكن التحرك بمستوى مائل

مسار X_{31}

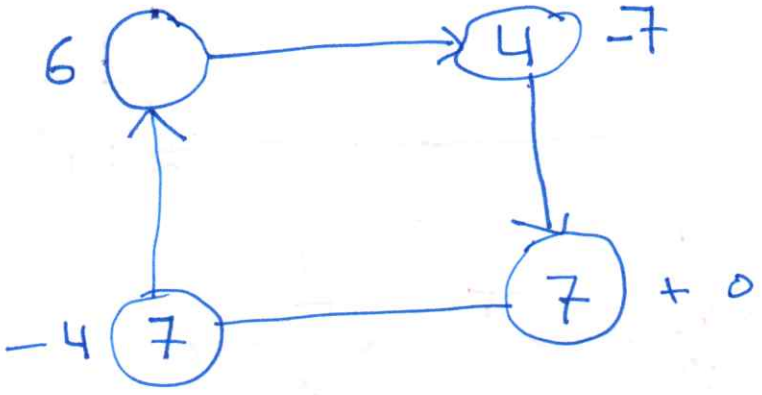
$$\overset{+}{X}_{31} \rightarrow \bar{X}_{33} \rightarrow \overset{+}{X}_{23} \rightarrow \bar{X}_{21} \rightarrow \overset{+}{X}_{12} \rightarrow \bar{X}_{11} \rightarrow X_{31}$$

والكلفة المقدرة للمسار X_{31}

$$\hat{C}_{31} = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{21} + C_{12} - C_{11}$$

$$\hat{C}_{31} = 3 - 7 + 0 - 4 + 1 - 5 = -12$$

ثانياً نرسم المسار المغلق للمتغير X_{32} للخلية L_3D_2



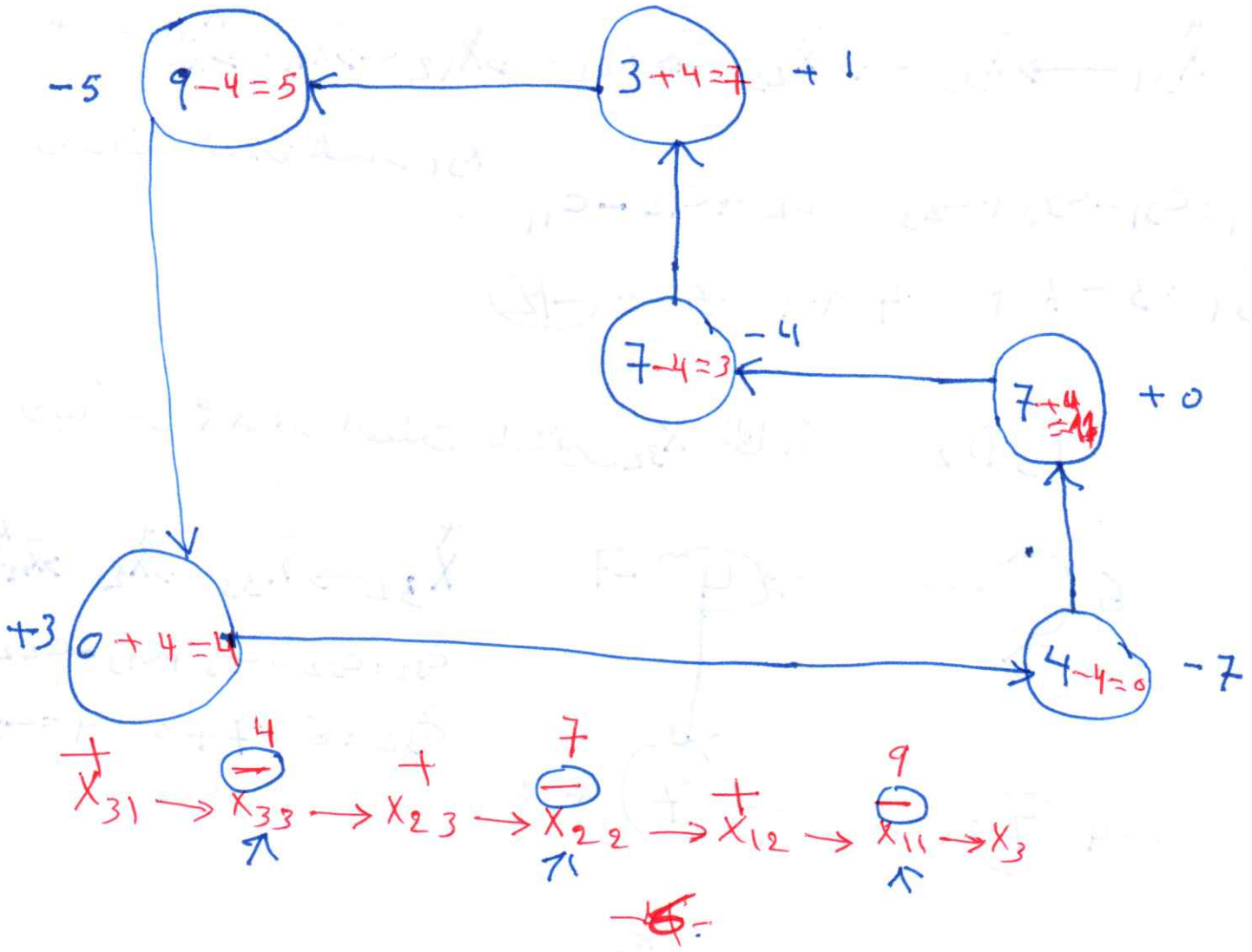
$$\overset{+}{X}_{32} \rightarrow \bar{X}_{33} \rightarrow \overset{+}{X}_{23} \rightarrow \bar{X}_{22}$$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - C_{33} + C_{23} - C_{22}$$

$$\hat{C}_{32} = 6 - 7 + 0 - 4 =$$

باستعراض قيم التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة نجد ان تكاليف النقل يمكن تخفيضها في حال تشغيل الخلية D_1 و L_3 حيث انها لها اقل كلفة غير مباشرة ($L_3 D_1 = -4$) وسنحدد عدد الخلايا التي سيتم نقلها الى هذه الخلية ($L_3 D_1$)

تحدد الكمية التي ستنقل الى الخلية ($L_3 D_1$) من الخلايا المشغولة على اساس اقل مقدار في الخلايا المشغولة (الارقام داخل الدوائر في الشكل ادناه) التي اشارت تعاسالية بالمسار المغلق للخلية $S_3 D_1$



بدراسة الخلايا التي يمكن النقل منها الى الخلية $(L_3 D_1)$ نجد انه من الممكن ان يتم النقل من الخلية $L_1 D_1$ او $L_2 D_2$ او $L_3 D_3$ (حيث انها الخلايا التي تم تقديرها وهو السالب لها في المسار المغلق لـ $(L_3 D_1)$

وحفاظاً على عدم سالبية الخلايا نأخذ اقل تعبئة للخلايا ذات المسار السالب وهي 4 الخلية $L_3 D_3$

اذن المتغير الداخل سيمثل X_{31} والمتغير الخارج سيمثل X_{33}

اي قيمة $(X_{33} = 0)$ وسيتم نقل وحداث X_{33} الى X_{31}

اي انه $X_{31} = 4$

ولكي يبقى النموذج متوازن نرجع الى مسار X_{31}

ونضيف (4) الى اي متغير بالمسار الموجب لـ X_{31}

ونطرح (4) الى اي متغير بالمسار السالب لـ X_{31}

$$X_{31} \xrightarrow{+4} X_{33} \xrightarrow{-4} X_{23} \xrightarrow{+4} X_{21} \xrightarrow{-4} X_{12} \xrightarrow{+4} X_{11} \xrightarrow{-4} X_{31}$$

$0+4=4$ $\quad 4-4=0$ $\quad 7+4=11$ $\quad 7-4=3$ $\quad 3+4=7$ $\quad 9-4=5$

وبهذا يصبح جدول النقل كالآتي الحركة الثانية

من \ الى	D_1	D_2	D_3	a_i
L_1	5 (5)	1 (7)	8	12
L_2	2	4 (3)	5 (11)	14
L_3	3 (4)	6	7	4
b_j	9	10	11	30 / 30

وعليه فان تكاليف النقل طبقاً لجدول النقل الثاني هي :-

$T.C_2 = 5*5 + 1*7 + 4*3 + 0*11 + 3*4 + 6*0 = 56$

طبقاً لجدول الثاني قلت الكلفة عما كانت عليه بالجدول الاول

$T.C_1 = 5*9 + 1*3 + 4*7 + 0*7 + 7*4 = 104$

اختبار مثالية جدول النقل الثاني :-

يتم اختبار مثالية جدول النقل الثاني طبقاً لنفس القواعد السابقة والتي تتمثل في دراسة اثر شغل الخلايا الفارغة على التكلفة الكلية وذلك على النحو التالي

يتم تقييم اثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وهذه الخلايا هي

L_1D_3 و L_2D_1 و L_3D_2 و L_3D_3

اولاً - الخلية L_1D_3 ~~انخفاض~~ المسار المغلق للمتغير X_{13}

$$X_{13}^{+} \rightarrow \bar{X}_{23} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow \bar{X}_{12} \rightarrow X_{13}$$

$$\hat{C}_{13} = C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12}$$

$$\hat{C}_{13} = 8 - 0 + 4 - 1 = 11$$

ثانياً الخلية L_2D_1 والمسار المغلق للمتغير X_{21}

$$X_{21}^{+} \rightarrow \bar{X}_{22} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow \bar{X}_{11} \rightarrow X_{21}$$

$$\hat{C}_{21} = C_{21} - C_{22} + C_{12} - C_{11}$$ والتكلفة غير المباشرة

$$\hat{C}_{21} = 2 - 4 + 1 - 5 = -6$$

ثالثاً الخلية L_3D_2 والمسار المغلق للمتغير X_{32}

$$X_{32}^{+} \rightarrow \bar{X}_{12} \rightarrow X_{11}^{+} \rightarrow \bar{X}_{31} \rightarrow X_{32}$$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - C_{12} + C_{11} - C_{31} = 6 - 1 + 5 - 3 = 7$$

رابعاً الخلية L_3D_3 والمسار المغلق للمتغير X_{33}

$$X_{33}^{+} \rightarrow X_{23}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{11}^{+} \rightarrow X_{31}^{-} \rightarrow X_{33}$$

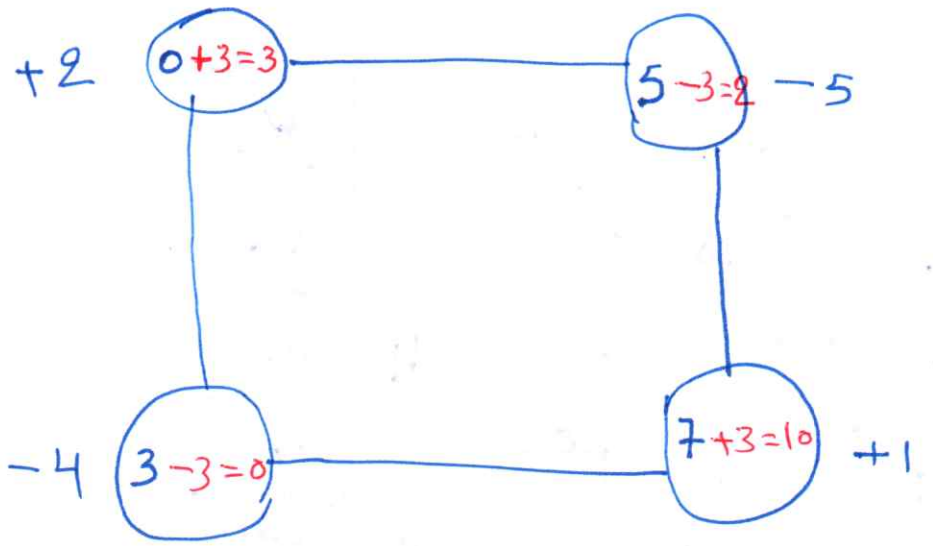
$$\hat{C}_{33} = C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{12} + C_{11} - C_{31} =$$

$$\hat{C}_{33} = 7 - 0 + 4 - 1 + 5 - 3 = 12$$

وبدراسة اثار شغل الخلايا الفارغة السابقة يتضح انه يمكن تخفيض تكاليف النقل في حالة ملئ الخلية L_2D_1

المسار المغلق لـ X_{21}

$$X_{21}^{+} \rightarrow X_{11}^{-} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow X_{22}^{-}$$



عدد الوحدات 3 5

اشارة المسار

$$X_{21}^{+} \rightarrow X_{22}^{-} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow X_{11}^{-}$$

وبدراسة الخلايا التي يمكن النقل منها الى الخلية L_2D_1 نجد أنه يمكن النقل من الخلية L_1D_1 و L_2D_2 وبالطبع سنختار اقل قيمة للمسار السالب وهي للمتغير X_{22} ($= 3$)

ويترتب على ذلك اعادة موازنة التوزيع اي تضيف 3، وحدات للمتغيرات ذات المسار الموجب وتطرح 3، وحدات للمتغيرات ذات المسار السالب وكما موضح بالمخطط اعلاه

$$X_{21}(+) \rightarrow X_{11}(-) \rightarrow X_{12}(+) \rightarrow X_{22}(-)$$

$X_{21} = 0+3 = 3$ ⟸ L_2D_1 الخلية

$X_{11} = 5-3 = 2$ ⟸ L_1D_1 − 5

$X_{12} = 7+3 = 10$ ⟸ L_1D_2 5

$X_{22} = 3-3 = 0$ ⟸ L_2D_2 5

ومن الممكن ان نعيد كتابة جدول النقل الثالث وفقاً لما يأتي

من \ الى	D_1	D_2	D_3	R_i
L_1	5 — 2	1 — 10	8	12
L_2	2 — 3	4	0 — 11	14
L_3	3 — 4	6	7	4
b_j	9	10	11	30 / 30

وتكون تكاليف النقل طبقاً للجدول الثالث السابق عرضه كالآتي

$T.C = 5*2 + 1*10 + 2*3 + 0*11 + 3*4 = 38$

نلاحظ ان شغل الخلية L_2D_1 ادى الى انخفاض التكاليف بمقدار 18 دينار

اختبار صلاحية خيار النقل الثالث

نكرر الخطوات المتبعة بالخطوات السابقة

الخلية L_1D_3

المسار المغلق للمتغير X_{13}

$$X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13}$$

والكلفة غير المباشرة

$$\hat{c}_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11}$$
$$= 8 - 0 + 2 - 5 = 5 > 0$$

الخلية L_2D_2

المسار المغلق للمتغير X_{22}

$$X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$$

الكلفة غير المباشرة لـ X_{22}

$$\hat{c}_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12}$$
$$= 4 - 2 + 5 - 1 = 6 > 0$$

الخلية L_3D_2

المسار المغلق للمتغير X_{32}

$$X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32}$$

الكلفة غير المباشرة لـ X_{32}

$$\hat{c}_{32} = c_{32} - c_{31} + c_{11} - c_{12}$$
$$= 6 - 3 + 5 - 1 = 7 > 0$$

الخلية L_3D_3

المسار المغلق للمتغير X_{33}

$$X_{33} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{33}$$

الكلفة غير المباشرة للمتغير X_{33}

$$\hat{c}_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{21} - c_{31}$$
$$= 7 - 0 + 2 - 3 = 6 > 0$$

بما انه جميع الكاليف غير المباشرة لجميع الخلايا غير المشغولة (الخلايا الفارغة) موجبة معنى ذلك اننا قد وصلنا الى الحل الامثل