توليد ارقام عشوائية بدالتين

مثال: ولد ارقام عشوائية تتبع دالة الكثافة الاحتمالية ادناه بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1].

0.4253, 0.0084, 0.675, 0.289, 0924, 0.438, 0.422, 0.859, 0.821, 0.259

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & -\infty \le x \le 0 \\ e^{-2x} & 0 \le x \le \infty \end{cases}$$

الحل:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{2t}\,2dt = \frac{1}{2}[e^{2t}]_{-\infty}^{x}$$
$$= \frac{1}{2}[e^{2x} - e^{-\infty}] = \frac{1}{2}[e^{2x} - 0] = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F_1(x) = R = \frac{1}{2}e^{2x} \rightarrow 2R = e^{2x} \rightarrow \ln(2R) = 2x \rightarrow \frac{\ln(2R)}{2} = x$$

$$\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2(-\infty)} = 0 < R < \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2(0)} = \frac{1}{2}$$

اذن

$$0 < R < \frac{1}{2}$$

$$F_2(x) = F_1(x = 0) + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = F_1(0) + \int_{0}^{x} e^{-2t}\,dt$$
$$= F_1(0) - \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-2t}\,(-2)dt = F_1(0) - \frac{1}{2}[e^{-2t}]_{0}^{x}$$
$$= F_1(0) - \frac{1}{2}[e^{-2x} - e^{0}] = F_1(0) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{2(0)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$F_2(x) = R = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} \rightarrow 1 - R = \frac{1}{2}e^{-2x} \rightarrow 2(1 - R) = e^{-2x}$$

$$\ln\big(2(1-R)\big) = -2x \rightarrow x = \frac{-1}{2}[\ln(2-2R)]$$

$$1-\frac{1}{2}e^{-2x} = 1-\frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} < R < 1-\frac{1}{2}e^{-2x} = 1-\frac{1}{2}e^{-\infty} = 1$$

اذن

$$\frac{1}{2} < R < 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} & -\infty \le x \le 0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-2x} & 0 \le x \le \infty \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\ln(2R)}{2} & 0 < R < \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2}[\ln(2-2R)] & \frac{1}{2} < R < 1 \end{cases}$$

R	$\frac{\ln(2R)}{2}$	$\frac{-1}{2}[\ln(2-2R)]$
0.425303	-0.08090	
0.008436	-2.04105	
0.675079		0.215513
0.289150	-0.27383	
0.924788		0.947146
0.438975	-0.06508	
0.422263	-0.08449	
0.859971		0.636379
0.821748		0.515704
0.259657	-0.32762	

مثال: ولد ارقام عشوائية تتبع دالة الكثافة الاحتمالية ادناه بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1].

0.4253, 0.0084, 0.675, 0.289, 0924, 0.438, 0.422, 0.859, 0.821, 0.259

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 0 \\ -x+1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

الحل:

$$F_1(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=\int_{-1}^{x}(t+1)\,dt=\int_{-1}^{x} t\,dt+\int_{-1}^{x} dt=\frac{1}{2}[t^2]_{-1}^{x}+[t]_{-1}^{x}$$

$$=\frac{1}{2}[x^2-1]+[x+1]=\frac{x^2-1+2x+2}{2}=\frac{x^2+2x+1}{2}$$

$$F_1(x)=R=\frac{x^2+2x+1}{2}\rightarrow 2R=x^2+2x+1\rightarrow 2R=(x+1)^2\rightarrow$$

$$\sqrt{2R}=(x+1)\rightarrow x=\sqrt{2R}-1$$

$$\frac{x^2+2x+1}{2}=\frac{(-1)^2+2(-1)+1}{2}=0<R<\frac{0^2+0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

اذن

$$0<R<\frac{1}{2}$$

$$F_2(x)=F_1(x=0)+\int_0^x f(t)\,dt=F_1(0)+\int_0^x(-t+1)\,dt=$$

$$=F_1(0)-\int_0^x t\,dt+\int_0^x dt=F_1(0)-\frac{1}{2}[t^2]_0^x+[t]_0^x$$

$$=F_1(0)-\frac{1}{2}x^2+x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+x=\frac{1-x^2+2x}{2}=\frac{-x^2+2x+1}{2}$$

$$=\frac{-(x^2-2x-1+1-1)}{2}=\frac{-(x^2-2x+1)+2}{2}=\frac{-(x-1)^2+2}{2}$$

$$F_2(x)=R=\frac{-(x-1)^2+2}{2}\rightarrow 2R=-(x-1)^2+2\rightarrow 2R-2=-(x-1)^2$$

$$2-2R=(x-1)^2\rightarrow(x-1)=\sqrt{2-2R}$$

$$x=1+\sqrt{2-2R}$$

$$\frac{-(x-1)^2+2}{2}=\frac{-(0-1)^2+2}{2}=\frac{1}{2}<R<\frac{-(x-1)^2+2}{2}=\frac{-(1-1)^2+2}{2}=1$$

اذن

$$\frac{1}{2} < R < 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{2} & -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{-(x-1)^2+2}{2} & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{2R} - 1 & 0 < R < \dfrac{1}{2} \\ 1 + \sqrt{2-2R} & \dfrac{1}{2} < R < 1 \end{cases}$$

R	$\sqrt{2R} - 1$	$1 + \sqrt{2-2R}$
0.425303	-0.077717	
0.008436	-0.870108	
0.675079		0.193873
0.289150	-0.239540	
0.924788		0.612154
0.438975	-0.063010	
0.422263	-0.081019	
0.859971		0.470795
0.821748		0.402920
0.259657	-0.279365	

H.W

مثال: ولد ارقام عشوائية تتبع دالة الكثافة الاحتمالية ادناه بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1]. قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

6.2. طريقة توليد البيانات بستعمال الدوال الجاهزة لبرنامج الماتلاب:

هنالك دوال جاهزة موجودة في برمجة الماتلاب يمكن استعمالها لتوليد بيانات حسب توزيع معين من دون اللجوء إلى استعمال الطرائق السابقة، وهذا يوفر الجهد والوقت أيضًا، ولكن يجب معرفة كيفية التعامل مع كل دالة وحسب الإيعازات التي تتطلبها كل دالة، والجدول (2-2) يوضح الدوال الجاهزة لبعض واشهر التوزيعات المعروفة.

جدول (2-2) يبين الدوال الجاهزة في الماتلاب لأهم التوزيعات المعروفة.

الصيغة العامة للدالة	التوزيع	الدالة
R=binornd(1,P,m,n)	bernoulli random numbers	bernoulli
R=binornd(N,P,m,n)	Binomial random numbers	binornd
R=poissrnd(lam,m,n)	Poisson random numbers	poissrnd
R=unidrnd(a,b,m,n)	Discrete uniform random numbers	unidrnd
R=nbinrend(R,P,m,n)	Negative binomial random numbers	nbinrnd
R=geornd(p,m,n)	Geometric random numbers	geornd
R=hygernd(M,K,N,m,n)	Hypergeometric random numbers	hygernd
R=normrnd(mu,sigms,m,n)	Normal random numbers	normrnd
R= chi2rnd(V,m,n,...)	Chi-square random numbers	chi2rnd
R=exprnd(mu,m,n)	Exponential random numbers	exprnd
R=gamrnd(A,B,m,n)	Gamma random numbers	gamrnd
R=betarnd(A,B,m,n)	Beta random numbers	betarnd
R=unifrnd(a,b,m,n)	Continuous uniform random numbers	unifrnd
R=raylrnd(B,m,n)	Rayleigh random numbers	raylrnd
R=wblrnd(A,B,m,n)	Weibull random numbers	wblrnd

لتوضيح صيغة واحدة كمثال:

R=gamrnd(A,B,m,n)

إذ إن:

A: معلمة القياس (Scale parameter).

B: معلمة الشكل (Shape parameter).

m, n: مجال المصفوفة.

ليتم التوليد من أي دالة من دوال التوزيعات في الجدول (2-2)، تكون على مرحلتين هما:

أولاً: توليد الرقم العشوائي (الأرقام العشوائية) بواسطة الدالة (rand( ))، الذي يمثل العدد العشوائي البذرة العام، والموضحة صيغتها العامة سابقاً.

ثانيًا: يتم استعمال الأعداد العشوائية المولدة في الخطوة الأولى لإيجاد البيانات المناسبة للتوزيع المطلوب وإجراء العمليات الإحصائية عليها كالوسط الحسابي.

مثال

```
clc
clear all
n=2;
m=10;
r=normrnd(0,1,m,n);
mean_r=mean(r);
disp('r=');
disp(r);
disp('mean_r=');
disp(mean_r);
```

```
clc
clear all
n=1;
m=10;
r=betarnd(0.5,3,m,n);
mean_r=mean(r);
disp('r=');
disp(r);
disp('mean_r=');
disp(mean_r);
```

مثال (2-15): اكتب برنامجًا لتوليد متجه قيم عشوائية باستعمال عدد العشوائي البذرة العام، ثم أوجد الوسط الحسابي لتلك القيم؟

الجواب:

كتابة البرنامج على النحو الآتي:

```
clc
clear all
n=input('n=');%(size array)
R=rand(n,1); %(numbers of random)
Mean_R=mean(R); %(mean)
disp('R=');
disp(R);
disp('Mean_R=');
disp(Mean_R);
```

1.6.2. تكرار التجربة: *Repeat the experiment:*

إن أهم عملية في توليد البيانات (المحاكاة) هي عملية تكرار التجربة أكثر من مرة، وذلك لتتلائم البيانات على نحو يضمن عدم الحصول على مشاكل في البيانات المولدة، وأيضًا تكون ضمن سياق معين حسب شروط التوليد، والاستفادة من تكرار التجربة يكون في إيجاد معدل (وسط حسابي) لكل مرة تكرر فيها التجربة، أي إذا طلب توليد عشر قيم لمتغير على أن تكرر التجربة (100) مرة، هنا المفهوم الحصول على القيم الأولى من المتغير من خلال توليد تكرار التجربة (100) مرة ثم إيجاد المعدل لهذه القيم، فيتم الحصول على قيمة واحدة، وهي تمثل القيمة الأولى للمتغير، وهكذا حتى يتم الحصول على عشر قيم للمتغير المولد.

مثال (2-16): اكتب برنامجًا لنفس المثال (2-15)، ولكن كرر التجربة لعدد (100)؟

الجواب:

كتابة البرنامج على النحو الآتي:

```
clc
clear all
n=4;%input('n=');%(size array)
r=100;%(number of repetition)
```

```
for i=1:n
 R=zeros;
  for j=1:r
R(j)=rand;%(num. of random)&(repeat 100)
    end
      Mean_R(i)=mean(R); %(mean)
end
disp('Mean_R=');
disp(Mean_R);
```

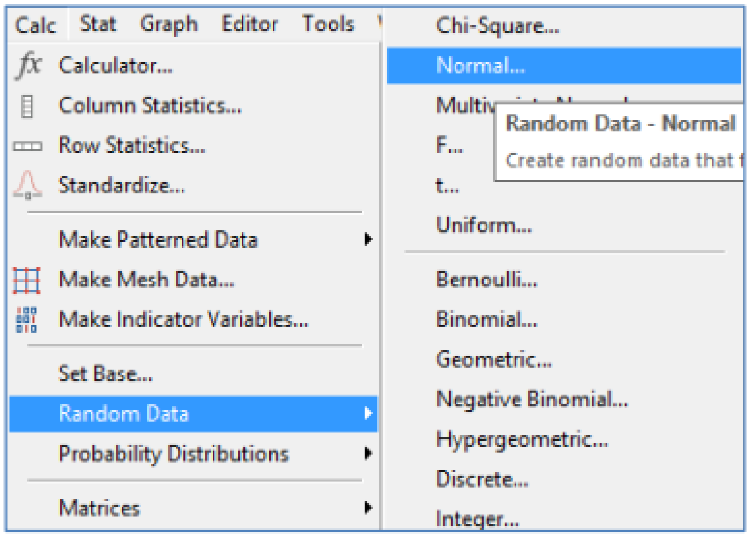
يمكن كتابة البرنامج على نحو آخر:

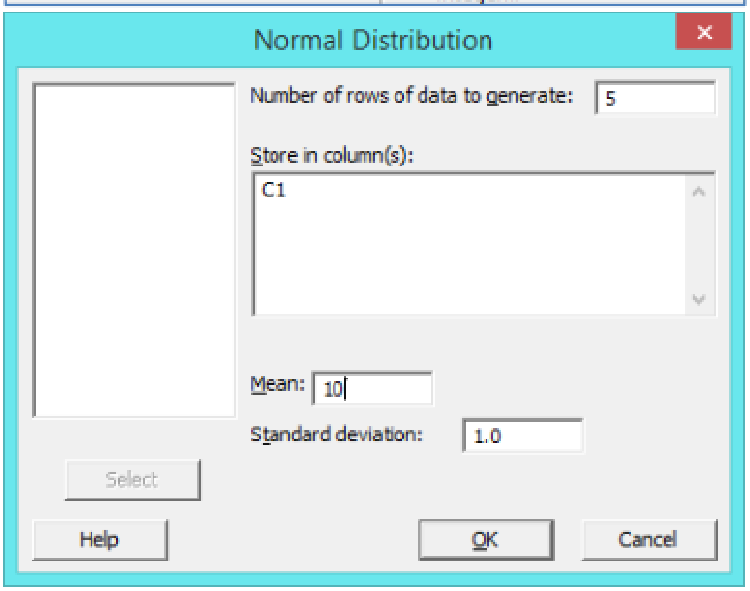
```
clc
clear all
n=input('n=');%(size array)
r=100;%(number of repetition)
R=rand(r,n);%(numbers of random)&(repet 100)
Mean_R=mean(R); %(mean)
disp('Mean_R=');
disp(Mean_R);
```

د. عمر سالم - المحاكاة

التوليد باستخدام البرنامج الجاهزMINITAB

توليد ارقام عشوائية بالاعتماد على احد التوزيعات الاحصائية (Random data):





النتائج :

↓	C1
1	9.8839
2	11.1388
3	11.9075
4	9.1631
5	10.2361

التوزيعات المتقطعة *Discrete Didtributions*
:
خوارزمية ايجاد قيم عشوائية لتوزيع احتمالي متقطع باستعمال طريقة التحويل المعكوس.
اذا كان المتغير العشوائي X ياخذ القيم الاتية $X_1, X_2, \dots, X_n$ باحتمال قدره $p_1, p_2, \dots, p_n$ على التوالي بحيث ان

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1, \qquad 0 \le P \le 1$$

فالاتي خطوات ايجاد الارقام العشوائية:

1. نوجد الدالة التوزيعية التراكمية $F(X_i)$، اذ ان:

$$F_1 = P_1$$
$$F_2 = P_1 + P_2$$
$$\vdots$$
$$F_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

2. توليد ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم القياسي
3. نختار رقم عشوائي R_i فاذا كان

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_i < R_i \le \sum_{i=1}^{n} P_i$$

بمعنى ان

$$F_{n-1} < R_i \le F_n$$

فعندئذ الرقم العشوائي ياخذ القيم الاتية

$$0 < R \le F_1 \quad \longrightarrow X_1$$
$$F_1 < R \le F_2 \quad \longrightarrow X_2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} P_i < R \le \sum_{i=1}^{k} P_i \longrightarrow X_k$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_i < R \leq \sum_{i=1}^{n} P_i \longrightarrow X_n$$

مثال:

اذا كان عدد عمليات شحن البضائع اليومية واحتمال حدوثها في رصيف ميناء لشركة ما هو الاتي:

X	$P(X)$	$F(X)$
0	0.50	0.50
1	0.30	0.80
2	0.20	1.00

اوجد عينة عشوائية بحجم (10) تتبع التوزيع الاحتمالي لعدد عمليات الشحن وذلك بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي، ثم قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة.

.

$$X = \begin{cases} 0 & R \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 < R \leq 0.8 \\ 2 & 0.8 < R \leq 1.0 \end{cases}$$

R_i	X
0.527744	1
0.276503	0
0.586335	1
0.707656	1
0.266173	0
0.190932	0
0.320932	0
0.103122	0
0.909483	2
0.878226	2

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 0.7$$

$$S.D = 0.823273$$

$$E(X) = \sum xp(x) = 0 * 0.5 + 1 * 0.3 + 2 * 0.2 = 0.7$$

$$Var\ (x) = EX^2 - (E(x))^2$$

$$EX^2 = \sum x^2 p(x) = 0 * 0.5 + 1 * 0.3 + 4 * 0.2 = 1.1$$
$$Var\ (x) = 1.1 - (0.7)^2 = 0.61$$

$$\sigma = 0.7810$$

التوزيع المنتظم المتقطع *Discrete Uniform Distribution*:

افرض ان المتغير X يتبع التوزيع المنتظم بالفترة $[1,2, \dots , k]$ بدالة الكتلة الاحتمالية الاتية
$$P(x) = \frac{1}{k}, \quad x = 1,2, \dots , k$$

وان

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{k} & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k-1}{k} & k-1 \le x < k \\ 1 & x \ge k \end{cases}$$

تعتمد الصيغة الاتية لغرض توليد ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم المتقطع

$$\frac{i-1}{k} < R \le \frac{i}{k}, \quad i = 1, 2, \dots , k$$

$$i - 1 < Rk \le i$$

$$Rk \le i < Rk + 1$$

$$X = \lceil Rk \rceil$$

اذ ان $\lceil y \rceil$ هو رقم صحيح بحيث يكون $\ge y$،
كمثال على ذلك

$$\lceil 5.62 \rceil = 6$$
$$\lceil 7.12 \rceil = 8$$
$$\lceil -1.83 \rceil = -1$$

مثال:

كون عينة عشوائية بحجم 10 ارقام تتبع التوزيع المنتظم المتقطع بالفترة $[1,2,\dots,10]$ بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي، ثم قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة.

R_i	Rk	$X = [Rk]$
0.527744	5.27744	6
0.276503	2.76503	3
0.586335	5.86335	6
0.707656	7.07656	8
0.266173	2.66173	3
0.190932	1.90932	2
0.320932	3.20932	4
0.103122	1.03122	2
0.909483	9.09483	10
0.878226	8.78226	9

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 5.3$$

$$S.D = 2.94581$$

$$E(X) = \frac{k+1}{2} = 5.5$$

$$Var\ (x) = \frac{k^2 - 1}{12} = \frac{100 - 1}{12} 8.25$$

$$\sigma = 2.8723$$