طريقة التطابق الخطي *Linear congenital method:*

او تسمى طريقة باقي القسمة (المطابقة) Congenital :

تعد طريقة البواقي واحدة من الطرق الشائعة الاستخدام، وتستخدم لتوليد ارقام عشوائية منتظمة زائفة وتعطى بالصيغة الاتية:

$$x_{i+1} = (ax_i + c)(\text{mod}\, m), \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (3)$$

او تاخذ الصيغة التالية

$$X_i = mod[(a * X_{i-1} + c),(m)] \quad i = 1,2,\ldots n$$

إذ إن (X_{i-1}) هو عدد البذرة

mod تعني ان النتيجة هي الباقي بعد قسمة الكمية $(ax_i + c)$ على الكمية m.

اذ ان a، c و m هي اعداد صحيحة غير سالبة، المعادلة (1.3) تعني، اذا تم قسمة $(ax_i + c)$ على m، فان الباقي هو x_{i+1}. في هذه المعادلة، فان m هي عدد كبير وتاخذ الصيغة $(m \le 2^w - 1)$، اذ ان w هي طول الكلمة في الحاسوب الذي يولد الارقام العشوائية (عدد البتات التي يستخدمها الحاسوب في حساب الاعداد الصحيحة، فاذا كان الحاسوب يعمل بمعالج طول الكلمة معمارية قدرها 32 بت، فان $m = 2^{32}$، ويعد هذا الحد الأقصى لعدد الأرقام غير المكررة التي يمكن توليدها $(m - 1)$ و $(i = 0)$ وهي قيمة البذرة.

حسب قيمة البذور، نعني أي قيمة أولية تستخدم لتوليد مجموعة من الأرقام العشوائية .يجب أن تكون قيمة البذور مختلفة كلما اختلفت مجموعة الأرقام العشوائية .لغرض ان تقع الأرقام بين 0 و 1، يجب تقسيم كل لـ X على $m - 1$. لتوضيح المعادلة (4.2)، لتكن، $a = 3$، $x_0 = 5$، $c = 3$، $m = 7$. عليه فان:

$$X_1 = (3 \times 5 + 3)(mod\ 7) = 4$$

$$X_2 = (3 \times 4 + 3)(mod\ 7) = 1$$

$$X_3 = (3 \times 1 + 3)(mod\ 7) = 6$$

$$X_4 = (3 \times 6 + 3)(mod\ 7) = 0$$

$$X_5 = (3 \times 0 + 3)(mod\ 7) = 3$$

$$X_6 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 7) = 5$$

$$X_7 = (3 \times 5 + 3)(mod\ 7) = 4$$

$$X_8 = (3 \times 4 + 3)(mod\ 7) = 1$$

$$X_9 = (3 \times 1 + 3)(mod\ 7) = 6$$

يلاحظ ان الارقام المولدة هي $4, 5, 3, 0, 6, 1, 4$. وهكذا لا يوجد سوى ستة أرقام غير متكررة لـ $m = 7$ وهي $(0, 1, 3, 4, 5, 6)$، ومن ثم ستعيد تكرار نفسها عندما $X_7 = 4$ وما بعدها وكما هو واضح في X_8 و X_9. واذا اخذنا m اكبر من 7 فسنحصل على ارقام غير مكررة اكثر وتساوي $(m - 1)$. ولكن هناك احتمال بان الارقام المولدة تعيد نفسها قبل ان تصل الى m. كمثال على ذلك، اذا كانت $m = 9$، سوف نلاحظ بان الارقام المولدة في حالة ان $x_0 = 5$، $c = 3$، هي كالاتي:

$$X_1 = (3 \times 5 + 3)(mod\ 9) = 0$$

$$X_2 = (3 \times 0 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_3 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_4 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_5 = (3 \times 0 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_6 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_7 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_8 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 9) = 3$$

$$X_9 = (3 \times 3 + 3)(mod\ 9) = 3$$

وهذا يعني بعد الرقم الثاني سيعيد تكرار نفسه، وبالتالي لن يتم الحصول على ارقام عشوائية . ولاجل الحصول على ارقام غير مكررة ، فانه يتطلب استيفاء الشروط الاتية:

1. ان c و m ليس بينهما قاسم مشترك باستثناء الواحد [1]، كما لاحظنا في المثال الاخير ان $m = 9$، $c = 3$، وان القاسم المشترك بين $m = 9$ و $c = 3$ هو 3، وعليه يتطلب الابتعاد عن اختيار الارقام التي بينها قاسم مشترك لان ذلك سيؤدي الى عدم الحصول على ارقام عشوائية تحظى بالقبول الاحصائي.
2. يجب ان تكون X_0 عدد فردي.
3. ان $a = 2^k + 1$، اذ ان $k > 1$.

ملاحظة: إن القيم الصحيحة التي يتم توليدها ستكون جميعها بين صفر و m وذلك بسبب قيمة المعامل m، وأن هذه الأعداد الصحيحة العشوائية يجب ان تتبع التوزيع المنتظم. كما ويمكن وضع أرقام عشوائية بين الصفر و الـ 1 بواسطة

$$R_i = \frac{X_i}{m}, \quad \mathrm{i} = 1, \ldots$$

عليه، سيتم استخدام الارقام العشوائية بين الصفر والواحد في اختبارات التوزيع المنتظم والاستقلالية.

٤. طريقة المعاينـة مـن التوزيعـات الاحتماليـة Sampling From Probability Distributions Method:

تشمل طريقة المعاينة من التوزيعات الاحتمالية على طرق تقوم بتوليد عينات عشوائية متتالية (t_1,t_2 ... من توزيع احتمالي $f(t)$

- كـل هـذه الطـرق أسست علـى استخدام أرقـام عشـوائية ذات توزيـع منـتظم قياسـي . Independent and identically distributed uniform (0,1) من هذه الطرق :

١- طريقة المعكوس Inverse Method

٢- طريقة التجميع Convolution Method

طريقة المعكوس Inverse Method

- هي طريقة يتم بموجبها الحصول على متغير عشوائي يتبع توزيعاً معينا لتوليد اعداد عشوائية تتبع ذلك التوزيع وذلك بالاعتماد على الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم القياسي .
- افترض أننا نريد ان نحصل على عينة عشوائية من دالة توزيع احتمالية $f(x)$ سواء كان التوزيع متصل او متقطع . فطريقة المعكوس تقوم أولا بإيجاد دالة الكثافة التراكمية $F(x)=P\{y\leq x\}$ حيث $0\leq F(x)\leq 1$ لكل قيم y المعرفة ثم نقوم بالخطوات التالية :

١- توليد اعداد عشوائية R من التوزيع المنتظم القياس $U(0,1)$.

٢- حساب او أيجاد قيمة x المرادة من $x = F^{-1}(R)$.

8-3-1 التحويل المعكوس في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة :

خوار زمية إيجاد قيم لتوزيع احتمالي متقطع باستعمال طريقة المعكوس:

١. لتكن لدينا n من القيم: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ باحتمالية $p_1,p_2,\ldots,p_n$ على التوالي، بحيث ان $0\leq p_i\leq 1$ وان $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

٢. نوجد الدالة التراكمية F_i من خلال:

$F_1=p_1;$
$F_2=p_1+p_2;$
:
$F_n=p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

٣. نختار عدد عشوائي $R_i\in[0,1]$ ونبحث عن الفترة $[F_{i-1},F_i]$ التي يقع فيها بحيث ان $F_{i-1}<R_i\leq F_i$.

٤. نلاحظ ان :

x_1 if $0<R_1\leq F_1$
x_2 if $F_1<R_2\leq F_2$
:
x_n if $F_{n-1}<R_n\leq F_n$.

مثال ١:

ليكن لدينا التوزيع المعبر عن الفترة الزمنية الفاصلة بين تعطيل الالات فى مصنع ما كما يلى :

$$
\begin{aligned}
p(t_n) &= 0.12 \qquad & t_1 &= 4\\
&= 0.48 & t_2 &= 5\\
&= 0.22 & t_3 &= 6\\
&= 0.18 & t_4 &= 7\\
& & n &= 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

أوجد عشرة قيم عشوائية :

الحل:

نوجد الاحتمالات التراكمية $\mathbf{F_n}$ (الفترات)

$$
\begin{aligned}
F_1 &= p_1 = 0.12\\
F_2 &= F_1 + p_2 = 0.60\\
F_3 &= F_2 + p_3 = 0.82\\
F_4 &= F_3 + p_4 = 1
\end{aligned}
$$

18

- نولد (نختار) أرقام عشوائية $\mathbf{R_i}$ فكانت الأرقام التالية

0.4764 , 0.8416 , 0.9434 , 0.3420 , 0.6827
0.8521 , 0.1129 , 0.5806 , 0.9285 , 0.6955

ناخد رقم من الاعداد العشوائيه R_i بصورة متتابعة وننظر في فترة يقع لكي نحدد القيمة العشوائية المطلوبة، حيث ان:

n	**$p(t_i)$**	**F_i**	**F_{i-1}-F_i**
1	0.12	0.12	0.0000-0.1200
2	0.48	0.60	0.1201-0.6000
3	0.22	0.82	0.6001-0.8200
4	0.18	1.00	0.8201-1.0000

- نجرى الآتي :

$\because 0.12 < R_1 \le 0.6$ $\quad R_1 = 0.4764$

$F_1 < R_1 \le F_2$

- إذن القيمة العشوائية ς:

$\varsigma_1 = t_2 = 5$

$\because 0.82 < R_2 \le 1$ $\quad R_2 = 0.8416$

$F_3 < R_2 \le F_4$

$\varsigma_2 = t_4 = 7$

فمثلا اول قيمة عشوائية هي R_1=0.4764 نلاحظ انها تقع $0.1201<R_1\le0.6$ وعليه فاننا نختار t_i=5. وعليه فاننا نحصل على الجدول التالي:

i	R_i	F_{i-1}-F_i	t_i
1	0.4764	0.2021-0.6000	5
2	0.8416	0.8201-1.0000	7
3	0.9434	0.8201-1.0000	7
4	0.3420	0.2021-0.6000	5
5	0.6827	0.6001-0.8200	6
6	0.8521	0.8201-1.0000	7
7	0.1129	0.2021-0.6000	5
8	0.5806	0.2021-0.6000	5
9	0.9285	0.8201-1.0000	7
10	0.6955	0.6001-0.8200	6

2-3-8 التحويل المعكوس في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة:

اذا كان لدينا متغير عشوائي مستمر x_i وله دالة كثافة احتمالية $f(x_i)$ وان دالة التوزيع تراكمية $F(x) = \int_{-\infty}^{x} t\,dt$ ولتوليد بيانات عشوائية مستمرة باستعمال طريقة التحويل المعكوس نتبع الخطوات الاتية :

1. ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density Function للتوزيع الاحتمالي
2. توليد متغير عشوائي u وفق التوزيع المنتظم المستمر بقيم بين الصفر والواحد وهذا يتم وفق الدالة $rand$ في البرنامج.
3. جعل الدالة الكثافة الاحتمالية مساوية لقيمة المتغير العشوائي u اي ان $u = pdf$
4. ايجاد قيمة x بدلالة u (باستعمال التحويل المعكوس)اي ايجاد $x = F^{-1}(u)$
5. كتابة البرنامج المتعلق بقيمة x

مثال:

ولد ارقام عشوائية تتبع دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = 2x, \quad 0 \le x \le 1$$

بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1]. قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

خطوات الحل:

1. نوجد الدالة التوزيعية التجميعية (CDF)

$$F(x) = \int_0^X f(t)dt = \int_0^X 2t\,dt = x^2$$

2. ضع $F(X) = R$، وذلك لايجاد قيمة X بدلالة R.

$$F(X) = R = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{R} = \sqrt{R}$$

	R_i	$\sqrt{R}$
1	0.944749	0.971982
2	0.808217	0.899009
3	0.215339	0.464046
4	0.282337	0.531354
5	0.149876	0.387138
6	0.306695	0.553801
7	0.493914	0.702790
8	0.951257	0.975324
9	0.778437	0.882291
10	0.406761	0.637778
11	0.518260	0.719903
12	0.061377	0.247744
13	0.529861	0.727916
14	0.922619	0.960531
15	0.401311	0.633491
16	0.420398	0.648381
17	0.126698	0.355947
18	0.853377	0.923784
19	0.119882	0.346240
20	0.443977	0.666316

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 0.661788$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0.226654$$

$$E(x) = \int_0^1 x\, f(x)dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3} = 0.666$$

$$var\ (x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = \int_0^1 x^2\, f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$var\ (x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.0555$$

$$SD = 0.235$$